Differentialgeometrie II Ksenia Fedosova, Nadine Große
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 17/18

Übungsblatt 12

Übungsaufgabe 45. [Fleig/Storch] Wir betrachten $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der induzierten Metrik. Für eine Funktion $f \in C^\infty(S^n)$ setzen wir $\hat{f}(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$.

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta_{S^n} f = (\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} \hat{f})|_{S^n}$ und $(\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} \hat{f})(x) = |x|^{-2}(\Delta_{S^n} f)\left(\frac{x}{|x|}\right)$ gilt.

(ii) Berechnen Sie $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} - \frac{1}{r^2}\Delta_{S^n}$ (Hier ist $r = |x|$).

(iii) Sei $g \in C^\infty(S^n)$. Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}(r^\nu g) = 0$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ genau dann gilt, wenn g eine Eigenfunktion von Δ_{S^n} zum Eigenwert $\lambda = \nu(\nu + n - 1)$ ist.

(iv) Folgern Sie, dass falls g eine Eigenfunktion zu λ von Δ_{S^n} ist, dass Sie $\nu \geq 0$ wählen können und Sie $r^\nu g$ damit zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzen können.

(v) Zeigen Sie, dass in der Situation von (iv) $r^\nu g$ sogar glatt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ ist und zeigen Sie (z.B. durch Einschränken auf eine Ursprungsgerade), dass dann $\nu \in \mathbb{N}$ sein muss.

Also muss ein Eigenwert von Δ_{S^n}, die Form $\lambda = k(k + n - 1)$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ haben. [1]

Übungsaufgabe 46. [Beisitzer/Grom] Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Krümmungstensor R.

(i) Wir betrachten geodätische Normalkoordinaten x^i um p. Sei $e_i = \partial_{x^i}|_p$. Berechnen Sie mit Hilfe von Übungsaufgabe 41.ii, dass
$$\Delta = -\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} - (e_i)^\flat \wedge \iota(e_j) R(e_i, e_j)$$
für den Hodge-Laplace auf k-Formen gilt.

(ii) Folgern Sie, dass für einen beliebigen Orthonormalrahmen e_i um p
$$\Delta = -\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} + \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} - (e_i)^\flat \wedge \iota(e_j) R(e_i, e_j)$$
gilt.

(iii) Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ harmonisch, also $\Delta\alpha = 0$. Sei $|\alpha|_g^2 := g(\alpha, \alpha)$. Zeigen Sie, dass
$$-\Delta|\alpha|_g^2 = 2|\nabla\alpha|^2 + 2\mathrm{Ric}(\alpha^\flat, \alpha^\flat)$$
gilt.

(iv) Folgern Sie, dass auf jeder geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Riccikrümmung, jede harmonische 1-Form α parallel ist (d.h. $\nabla\alpha \equiv 0$). Ist weiterhin die Riccikrümmung sogar positiv, gibt es gar keine harmonischen 1-Formen. (Hinweis: Nutzen Sie, dass nach dem Satz von Gauß $\int_M \Delta f \mathrm{dvol}_g = 0$ ist.)

[1] Das sind auch wirklich alle Eigenwerte, vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics.

Übungsaufgabe 47. [Ammann/Jeßberger] Sei (M, g) eine zweidimensionalen orientierte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten die Gleichung $\Delta u = he^u$ mit $h \in C^\infty(M)$, $h \not\equiv 0$. Zeigen Sie:

(i) Damit die obige Gleichung für u eine Lösung hat, muss h das Vorzeichen wechseln und $\int_M h \mathrm{dvol}_g < 0$ sein.

(ii) Ist u eine Lösung, dann gilt $\int_M he^u \mathrm{dvol}_g = 0$.

(iii) Aus $\Delta v = 0$ folgt $v = \text{const}$. Deshalb gibt es ein $c > 0$, so dass für alle $v \in H^1$ mit $\int_M v \mathrm{dvol}_g = 0$ die Poincare Ungleichung $\|v\|_{L^2} \leq c\|\nabla u\|_{L^2}$ gilt.

(iv) Der Raum $F = \{v \in H^1 \mid \int_M he^v \mathrm{dvol}_g = 0, \int_M v \mathrm{dvol}_g\}$ ist nichtleer.

(v) Betrachten Sie $J \colon F \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \int_M |\nabla v|^2 \mathrm{dvol}_g$. Wir setzen $a := \inf_{v \in F} J(v)$. Sei $v_i \in F$ eine Folge mit $J(v_i) \to a$. Zeigen Sie, dass v_i in H^1 beschränkt ist und damit in L^4 gegen ein v konvergiert. Folgern Sie, dass e^{v_i} in L^2 gegen e^v konvergiert und damit $v \in F$ liegt. Zeigen Sie weiterhin, dass der Limis v erfüllt $J(v) = a$.

(vi) Nutzen Sie Lagrange-Multiplikation[2], um zu zeigen, dass v eine schwache Lösung von $2\Delta u = f := -\lambda he^v - \mu$ ist. D.h. betrachten Sie $\tilde{F}(v + \epsilon\phi) := \int_M \left(|\nabla(v + \epsilon\phi)|^2 + \lambda he^{v+\epsilon\phi} + \mu(v + \epsilon\phi)\right) \mathrm{dvol}_g$ für $\phi \in H^1$ und berechnen Sie $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\tilde{F}(v + \epsilon\phi)$.

(vii) Benutzen Sie, L^p und Schauder-Abschätzungen induktiv, um zu zeigen, dass $v \in C^\infty(M)$ ist.

(viii) Zeigen Sie, dass $\mu = 0$ und $\lambda < 0$ sein muss.

Setzen Sie alles obige zusammen, um zu folgern, dass $\Delta u = he^u$ für $h \in C^\infty(M)$, $h \neq 0$ und h erfülle die Bedingungen aus (i) eine glatte Lösung $u \in C^\infty(M)$ besitzt.

Übungsaufgabe 48. [Lenthe/Stappen] Sei (M, g) eine zweidimensionalen orientierte geschlossenen Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Gaußkrümmung K_g von (M, g) ist gleich der Hälfte der Skalarkrümmung. Sei $\chi(M)$ die Eulercharakteristik.[3] Man kann nachrechnen, dass

$$K_{\tilde{g}} = e^{-2u}(K_g - \Delta_g u) \tag{1}$$

für $\tilde{g} = e^{2u}g$ gilt. Ab jetzt sei $\chi(M) = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass die Gaußkrümmung einer Metrik g auf M entweder konstant Null sein muss oder das Vorzeichen wechseln muss.

(ii) Zeigen Sie, dass $\Delta_g v = K_g$ eine glatte Lösung besitzt und es damit eine zu g konforme Metrik mit $K_{\tilde{g}} \equiv 0$ gibt.

(iii) Sei von nun an $K \in C^\infty(M)$, wobei K das Vorzeichen wechselt. Zeigen Sie, dass für alle Riemannschen Metriken h auf M und alle Funktionen $a \in C^\infty(M)$ es einen Diffeomorphismus $\phi \colon M \to M$ gibt, so dass $\int_M e^a(K \circ \phi) \mathrm{dvol}_h < 0$ gilt.

(iv) Wir wollen nun untersuchen, ob es auch eine Metrik $\tilde{g}$ auf M mit $K_{\tilde{g}} \equiv K$ gibt. Unser Ansatz ist $\tilde{g} = e^{2u}\phi^* g$ für geeignetes u und einen geeigneten Diffeomorphismus $\phi \colon M \to M$. Wir setzen dazu $\bar{g} = \phi^* g$ und $w := 2(u - v)$ mit $\Delta_{\bar{g}} v = K_g \circ \phi$. Zeigen Sie, dass, falls u die Gleichung (1) für $\phi^* g$ statt g ist, dann w eine Lösung von $\Delta_{\bar{g}} w = he^w$ für geeignetes $h \in C^\infty(M)$ ist. Benutzen Sie Übungsaufgabe 47 um zu folgern, dass ein solche Lösung w und damit ein glattes u existiert, so dass $K_{\tilde{g}} \equiv K$ gilt.

[2]=Methode um kritische Punkte unter Nebenbedingungen zu finden
[3]$\chi(M) = 2 - 2\cdot$Anzahl der Löcher. Es gilt der Satz von Gauß-Bonnet: $\int_M K_g \mathrm{dvol}_g = 2\pi\chi(M)$.