
Übungsblatt 7

Abgabe bis Mittwoch 18.6. um 10 Uhr.

Aufgabe 19 $((2,5+2,5^*)+2,5)$. Schon in der Grundschule werden Parkettierungen genutzt, um das Erkennen von Mustern und Strukturen zu fördern (Parkette legen, Parkette weiterzeichnen, Parkette selbst erfinden, ...). Solche Parkette stellt man sich so vor, dass sie sich unendlich in der Ebene fortsetzen. Die Regelmäßigkeiten, die solchen Mustern zu Grunde liegen, lassen sich mathematisch mit Hilfe von Kongruenzabbildungen/Symmetrien beschreiben. Diese bilden mit der Hintereinanderausführung immer eine Gruppe, die Symmetriegruppe des jeweiligen Musters. Diese ist immer eine Untergruppe aller Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene.

- (i) Füllen Sie folgenden Lückentext, welches ein Vorgehen beschreibt, wie man systematisch nach allen Symmetrien/Kongruenzabbildungen von unendlich ausgedehnten Mustern sucht und beantworten Sie die Fragen in orange (die Fragen mit * sind Zusatz):

Jede Symmetrie eines Musters in der Ebene ist eine Verschiebung, _____, _____ oder eine _____. Ist das Muster nur endlich ausgedehnt kann es nur eine _____ oder eine _____ sein.

Im Folgenden betrachten wir nur unendlich ausgedehnte Muster und auch nur solche, deren Symmetriegruppe von endlich vielen Symmetrien erzeugt werden:

(i-a*) Was ist ein Muster/Objekt in der Ebene, dessen Symmetriegruppe nicht endlich erzeugt ist?

Hier sollte man zunächst alle Verschiebungen finden. Diese bilden eine _____ aller Symmetrien des Musters. Die Größe eines minimalen Erzeugendensystems aller Verschiebungen ist (falls die Verschiebungen endlich erzeugt und nicht nur aus der Identität bestehen) 1 oder 2.

(i-b*) Zeichnen Sie Beispiele für Muster/Objekte, deren Verschiebungen einmal durch nur eine Verschiebung und einmal durch zwei Verschiebungen erzeugt werden.

Zeichnet man die zugehörigen Verschiebungsvektoren (beginnend bei einem beliebigen aber für alle Vektoren festen Punkt) ins Muster ein, so spannen diese Vektoren im ersten Fall einfach nur den Vektor selbst und im zweiten Fall ein P _____ auf – in beiden Fällen nennt man dies eine *Translationszelle*.

Als nächstes finden wir alle Spiegelungen. Dabei hilft: Für eine Spiegelung s_g , die Symmetrie des Musters ist, gibt es auch eine _____ s_h , die Symmetrie des Musters ist, so dass h einen Anteil (ein Intervall) hat, der in oder auf dem Rand der Translationszelle verläuft.

(i-c) Begründen Sie diese Aussage.

Als nächstes finden wir alle Drehungen.

(i-d) Formulieren und begründen Sie die analoge Aussagen wie die in (i-c) bewiesenen.

Nun bleiben noch die Gleitspiegelungen. Es kann Gleitspiegelungen geben, wo die Verschiebung und Spiegelung aus der sie zusammengesetzt sind, nicht sowieso schon selbst Symmetrien des Musters sind.

(i-e*) Es gibt sogar Muster, die eine Gleitspiegelung als Symmetrie haben, aber überhaupt keine Spiegelung. Was ist ein Beispiel?

Wir suchen nun nur Gleitspiegelungen, wo die Verschiebung und Spiegelung aus der sie zusammengesetzt sind, nicht sowieso schon selbst Symmetrien des Musters sind. Denn die anderen werden schon durch die zuvor gefundenen Symmetrien erzeugt.

Die Hintereinanderausführung einer Gleitspiegelung¹ $v_{\vec{a}} \circ s_g$ mit sich selbst ist immer eine Verschiebung $v_{2\vec{c}}$, wobei $\vec{c}$ der zu g parallele Anteil von $\vec{a}$ ist (d.h. $\vec{a} - \vec{c}$ ist senkrecht zu g).

(i-f) Rechnen Sie diese Aussage mittels den Identitäten von Abschnitt III.1 im Skript nach.

(i-g*) Rechnen Sie nach, dass $v_{\vec{a}} \circ s_g = v_{\vec{c}} \circ s_{v_{\vec{b}}(g)}$ mit $2\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$ ist.

Diese letzte Aussage sagt uns, dass man eine Gleitspiegelung immer darstellen kann als eine Hintereinanderausführung einer Spiegelung und einer Verschiebung parallel zur Spiegelungsachse. D.h. wir suchen im folgenden nach dieser Darstellung – also g parallel zu $\vec{a}$. In diesem Fall ist dann auch der parallele Anteil $\vec{c}$ gleich $\vec{a}$. D.h. diese Verschiebung $v_{2\vec{a}} = (v_{\vec{a}} \circ s_g) \circ (v_{\vec{a}} \circ s_g)$ muss unter den schon gefundenen Verschiebungen der Symmetriegruppe sein. Außerdem gilt: Für eine solche Gleitspiegelung $v_{\vec{a}} \circ s_g$ gibt es auch eine Gleitspiegelung $v_{\vec{b}} \circ s_g$ mit $2\vec{b}$ ist ein Erzeuger der Translationszelle oder eine Diagonale der Translationszelle (letzteres wäre dann nur im Falle von von zwei Erzeugern).

(i-h*) Beweisen Sie diese Aussage.

D.h. man muss nur nach Gleitspiegelungen suchen deren Verschiebung ein Erzeuger der Translationszelle oder eine Diagonale derer ist. Dabei hilft: Für eine Gleitspiegelung $v_{\vec{a}} \circ s_g$ ($\vec{a}$ wie oben), die Symmetrie des Musters ist, gibt es auch eine $v_{\vec{a}} \circ s_h$, die Symmetrie des Musters ist, so dass h einen Anteil hat, der in der Translationszelle verläuft.

(i-i) Begründen Sie diese Aussage.

- (ii) Welche Abbildungen lassen das linke Parkett bzw. das rechte Parkett B invariant? Beschreiben Sie diese (unendlich vielen) Abbildungen jeweils möglichst systematisch.



Aufgabe 20. Seien $ABCD$ vier Punkte auf einem Kreis k benannt im Uhrzeigersinn. Es schneiden sich AC und BD im Punkt P . Zeigen Sie, dass

$$|AP| \cdot |CP| = |BP| \cdot |DP|$$

gilt. Es existiere auch der Schnittpunkt Q von g_{AB} und g_{CD} . Gilt dann $|AQ| \cdot |BQ| = |CQ| \cdot |DQ|$? Begründen Sie.

Aufgabe 21 (1,5+(1+1,5+1)).

- (i) Konstruieren Sie das hyperbolische Dreieck mit den Eckpunkten i , $3i$ und $2 + 2i$ in der hyperbolischen Halbebene. Konstruieren Sie die Kanten nur mit Zirkel und Lineal (beschreiben Sie die Konstruktion).
- (ii) Sei $P = ai$ und $Q = bi$ für $b > a > 0$.
 - (a) Berechnen Sie $d_{\mathbb{H}}(P, Q)$.
 - (b) Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt $M = ci$ von $\overline{PQ}$ die Gleichung $c^2 = ab$ erfüllen muss.
 - (c) Geben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal von M bei gegebenem P und Q an und begründen Sie, warum diese das richtige Ergebnis liefert.

¹ $v_{\vec{a}}$ sei hier die Verschiebung um den Vektor $\vec{a}$.