# Übungsblatt 8

**Abgabe bis Mittwoch 25.6. um 10 Uhr.**

**Aufgabe 22** (1+2+2)**.**

(i) Zeigen Sie: Es gibt keine Rechtecke (= Vierecke, bei denen alle Innenwinkel 90° sind) in der hyperbolischen Ebene.

(ii) Ein *Pseudoquadrat* sei ein Viereck der hyperbolischen Ebene, deren Seitenlänge und Innenwinkel alle gleich groß sind.

Finden Sie alle Innenwinkel $\alpha$ (mit Begründung) für die es ein Pseudoquadrat gibt. Wie viele Pseudoquadrate gibt es dann für jedes dieser $\alpha$ bis auf Kongruenz?

(iii) Mit welchen Pseudoquadraten kann die hyperbolische Ebene parkettiert werden?

**Aufgabe 23** (3+2)**.**

(i) Sei $s_a\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto az$ $(a > 0)$ und $t_b\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto z+b$ $(b \in \mathbb{R})$. Sei $r_\alpha\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die Drehung um $0 \in \mathbb{D}$ um den Winkel $\alpha$ (entgegen dem Uhrzeigersinn.) Alle diese Abbildungen sind Kongruenzabbildungen für $\mathbb{H}$ bzw. $\mathbb{D}$.

Seien nun $p, q \in \mathbb{D}$, $p \neq q$. Finden Sie mittels geeigneter $s_a$,y $t_b$, $r_\alpha$ und $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $p \mapsto \frac{p-\mathrm{i}}{p+\mathrm{i}}$, eine Kongruenzabbildung von $\mathbb{D}$, die $p$ auf 0 und $q$ auf $r \in [0,1) \subset \mathbb{D}$ mit $d_{\mathbb{D}}(p,q) = d_{\mathbb{D}}(0,r)$ abbildet. Geben Sie die Koordinaten von $r$ in Abhängigkeit von $d := d_{\mathbb{D}}(p,q)$ an.

(ii) Sei nun $pqr$ ein Dreieck in $\mathbb{H}$. Gibt es immer ein zu $pqr$ kongruentes Dreieck $stu$, für welches $s$ und $t$ auf der Geraden $\{x = 0\}$ liegen und $u$ die gleiche $y$-Koordinate wie $s$ besitzt?

**Aufgabe 24** (2+2+1)**.**

(i) Beweisen Sie, dass die Charakterisierung der Mittelsenkrechten[1] der euklidischen Geometrie, Lemma I.5.2., auch in der hyperbolischen Geometrie gilt.

(ii) Zeigen Sie schneiden sich zwei der Mittelsenkrechten eines Dreiecks in der hyperbolischen Geometrie (d.h. die Dreiecksseiten sind Abschnitte hyperbolischer Geraden) in einem Punkt, dann geht auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt.

(iii) Schneiden sich in einem Dreieck in der hyperbolischen Geometrie immer die Mittelsenkrechten in einem Punkt? Begründen Sie.

[1] Wir definieren Mittelsenkrechte wie im Euklidischen: Seien $p, q$ Punkte in der hyperbolischen Ebene. Der Mittelpunkte von $pq$ ist der Punkt $s$ auf der hyperbolischen Gerade durch $p$ und $q$, der zu $p$ und $q$ den gleichen (hyperbolischen) Abstand hat. Die Mittelsenkrechte ist die (hyperbolische) Gerade, die durch den Mittelpunkt von $pq$ geht und zur (hyperbolischen) Gerade durch $p$ und $q$ einen rechten Winkel hat.