Elementargeometrie

Katharina Böcherer-Linder, Nadine Große, Jonah Reuß

SoSe25

Übungsblatt 11

Abgabe bis Mittwoch 16.7. um 10 Uhr.

Aufgabe 31. Vervollständigen Sie den Beweis des folgenden Lemmas:

Lemma V.4.8. *Sei $(P, G, \mathcal{A}, K)$ eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Sei $p, q \in P$ mit $p \neq q$. Dann gibt es ein $r \in P$ welches zwischen p und q liegt. Insbesondere enthält $\overline{pq}$ unendlich viele Punkte.*

Beweis. Sei g_{pq} die ________ Gerade, die nach ___ durch $p \neq q$ gegeben wird. Nach ___ gibt es einen Punkt $s \notin g_{pq}$. Sei $H = S(p, s)$. Nach Lemma _____ enthält H unendlich __________. Damit gibt es $t, u \in H$ mit $(\_, t, u) \in$ __. Insbesondere ist $u \neq q$, da sonst ______________________________

Sei v ein Punkt auf g_{uq}, der auf der anderen Seite von q als u liegt (existiert nach __________). Es ist dann $t \neq v$, was man wie folgt sieht: ____

____

____

____

Die Gerade g_{tv} schneidet die Kante $\overline{pu}$ der Dreiecks pqu in t. Auch ist keiner der Eckpunkte des Dreiecks pqu auf dieser Geraden. Nach ________________________ muss g_{tv} damit auch eine der anderen beiden Seiten im Inneren dieser Seiten schneiden. Dies kann nicht $\overline{uq}$ sein, da sonst ______________________________

____ Also schneidet g_{tv} die Strecke $\overline{pq}$ in einem Punkt r im Inneren dieser Strecke, was die erste Behauptung des Lemmas zeigt.

Damit enthält $\overline{pq}$ sogar unendlich viele Punkte, da ____

____. $\square$

Aufgabe 32. Sei $(P, G, \mathcal{A}, K)$ eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Zeigen Sie, dass zwei Dreiecke genau dann kongruent sind, wenn eine Seite und die dieser Seite anliegenden Winkeln kongruent sind (also (WSW) gilt).

Aufgabe 33 (1+1+3)**.** Sei $(P, G, \mathcal{A}, K)$ eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Zeigen Sie:

(i) Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig (= zwei seiner Seiten sind kongruent), wenn zwei seiner Winkel kongruent sind.

(ii) Sei ein gleichschenkliges Dreieck pqr gegeben und sei p der Eckpunkt, den die beiden kongruenten Seiten gemeinsam haben. Der Fußpunkt der Lotes von p auf g_{qr} ist gleichzeitig der Mittelpunkt m von $\overline{qr}$ (d.h. $m \in g_{qr}$ und $\overline{qm}$ und $\overline{mr}$ sind kongruent).

Definition: Seien $m, p, q \in P$ mit $p \neq q$. Der Kreis um m mit Radius $\overline{pq}$ sei die Menge aller Punkte r aus P, so dass $\overline{rm}$ zu $\overline{pq}$ kongruent ist.

(iii) Sei k_i, $i = 1, 2$, ein Kreis um den Mittelpunkt $m_i \in P$, $m_1 \neq m_2$. Seien $a, b, c \in k_1 \cap k_2$ mit $a \neq b$. Dann ist $g_{m_1 m_2} \perp g_{ab}$, der zugehörige Schnittpunkt ist der Mittelpunkt von $\overline{ab}$. Außerdem muss $a = c$ oder $b = c$ sein.