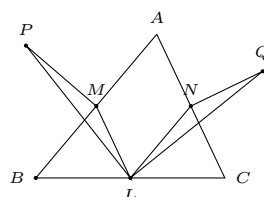


Aufgabe 1 ($7=1.5+3+2.5$). Lösen Sie mittels synthetischer euklidischer Geometrie. D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Sei ABC ein Dreieck. Seien M , N bzw. L die Mittelpunkte der Seiten AB , AC bzw. BC , vgl. Abbildung. Seien P bzw. Q Punkte außerhalb der Dreiecks mit $\overline{PM} \perp \overline{AB}$, $2|PM| = |AB|$ bzw. $\overline{QN} \perp \overline{AC}$, $2|QN| = |AC|$.

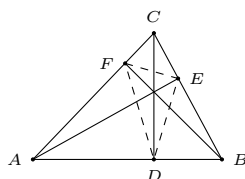


Wir betrachten die Situation wie im Bild: D.h. wir nehmen an $\overline{PL}$ schneidet $\overline{BM}$ im Inneren dieser Strecke und analog $\overline{QL}$ schneidet $\overline{NC}$ im Inneren der Strecke.

- (i) Zeigen Sie, dass $ANLM$ ein Parallelogramm ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Dreiecke PML und LNQ kongruent sind.
- (iii) Zeigen Sie, dass $\overline{PL}$ senkrecht auf $\overline{QL}$ steht.

Aufgabe 2 ($5=1+2+2$). Lösen Sie mittels synthetischer euklidischer Geometrie. D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Sei ABC ein Dreieck. Der Höhenschnittpunkt H sei im Inneren des Dreiecks. Sei DEF das zugehörige Höhenfußpunktdreieck, d.h. D ist der Fußpunkt der Höhe in ABC durch C , usw. vgl. Abbildung.



- (i) Geben Sie die Umkehrung des Satzes von Thales an.
- (ii) Finden Sie in der Abbildung sechs Sehnenvierecke (mit Begründung und Eckpunkte der Vierecke dürfen nur die Punkte A bis F und H sein.).
- (iii) Zeigen Sie, dass die Höhe CD im Dreieck DEF die Winkelhalbierende ist.

Aufgabe 3 ($5=2+3$). Lösen Sie mittels analytischer Geometrie:

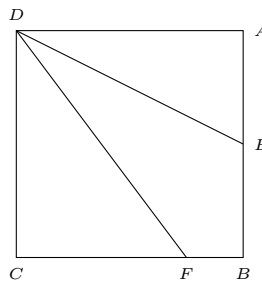
- (i) Beweisen Sie: Wenn die Diagonalen in einem Parallelogramm gleich lang sind, dann ist es ein Rechteck.
- (ii) Seien $ABCD$ vier Punkte mit $A \neq C$ und $B \neq D$. Zeigen Sie, dass $g_{AC} \perp g_{BD}$ genau dann gilt, wenn $|AB|^2 - |AD|^2 = |BC|^2 - |CD|^2$ ist.

Aufgabe 4 (5=2.5+2.5). Symmetrien

- (i) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Symmetriegruppe der folgenden Figur (das Muster sei in nach links und rechts periodisch fortgesetzt). Geben Sie ein Erzeugendensystem dieser Gruppe an, was die kleinste Anzahl möglicher Elemente enthält.

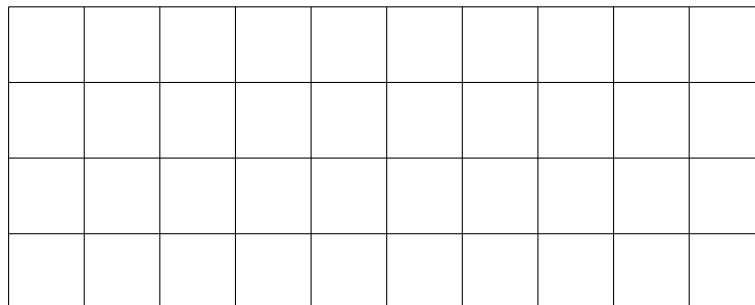


- (ii) Im Quadrat $ABCD$ sei $E \in \overline{AB}$ und $F \in \overline{CB}$ derart, dass $\angle ADE = \angle EDF$ ist. Verwenden Sie eine Drehung um D um 90° entgegen des Uhrzeigersinns, um zu zeigen, dass $|AE| + |CF| = |DF|$ ist.



Aufgabe 5 (8=2+2+2+2). Hyperbolische Halbebene Sei $A = 3 + i$, $B = 5 + i$ und $C = 3 + 2i$. Lösen Sie folgende Aufgaben in der hyperbolischen Geometrie:

- (i) Zeichnen Sie die Punkte ins Koordinatensystem ein (dafür Achsen geeignet beschriften) und skizzieren Sie darin die Geraden g_{AB} , g_{AC} und g_{BC} .



- (ii) Bestimmen Sie die Randpunkte von g_{AB} und g_{AC} und den Winkel zwischen g_{AB} und g_{AC} .
- (iii) Geben Sie eine Formel für den hyperbolischen Abstand an, die das Doppelverhältnis benutzt und geben Sie dabei insbesondere auch die Definition des Doppelverhältnis an.
- (iv) Bestimmen Sie die Randpunkte von g_{BC} .

Aufgabe 6 (4=1.5+2.5). Sphärische Geometrie

Seien $A, B, C \in S^2$, so dass ABC ein sphärisches Dreieck bilden. Sei M der Mittelpunkt der Seite AB . Es gelte $\angle CMA = 90^\circ$.

- (i) Zeigen Sie, dass ABC ein gleichschenkliges Dreieck ist, also zwei gleich lange Seiten besitzt.
- (ii) Es gelte zusätzlich $d_S(A, M) = d_S(C, -M)$. Bestimmen Sie $d_S(C, M)$ und $d_S(A, C)$ in Abhängigkeit von $d_S(A, B)$.

Aufgabe 7 (6=2+4). **Axiomatik**

- (i) Definieren Sie den Begriff der affinen Ebene (Formulieren Sie die darin vorkommenden Axiome aus).
- (ii) In einer affinen Ebene seien zwei verschiedene parallele Geraden g und h gegeben. Sei $p \in g$ und $q \in h$ und $\ell := g_{pq}$. Zu $r \in g$ sei ℓ_r eine zu ℓ parallele Gerade durch r .
Zeigen Sie, dass ℓ_r und h genau einen Punkt gemeinsam haben.

Aufgabe 8 (8=2+3+3). **Axiomatik**

Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen gegeben.

- (i) Geben Sie die Definition einer Strecke an und wann zwei Strecken kongruent sind.
- (ii) Zeigen Sie, dass Kongruent-Sein auf der Menge der Strecken eine Äquivalenzrelation ist. Die zu einer Strecke $\overline{pq}$ gehörige Äquivalenzklasse bezeichnen wir im Folgenden mit $[\overline{pq}]$.
- (iii) Sie die Geometrie nun sogar fast-euklidisch.

Seien $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$ zwei Strecken, für die es eine Kongruenzabbildung k mit $k(p), k(q) \in \overline{rs}$ gibt.

Zeigen Sie, dass es dann auch eine Kongruenzabbildung $\hat{k}$ mit $\hat{k}(p) = r$ und $\hat{k}(q) \in \overline{rs}$ gibt.

Aufgabe 9 (2). Sei ABC ein euklidisches Dreieck. Sei d der Durchmesser des Umkreises. Sei h die Länge der Höhe des Dreiecks auf BC . Sei $b = |AC|$ und $c = |AB|$. Zeigen Sie

$$bc = dh.$$