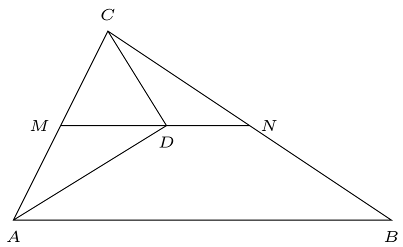
Nachklausur Elementargeometrie SoSe25

Bearbeitungszeit: 3h

Aufgabe 1 (5=1+2+2)**. Lösen Sie mittels synthetischer euklidischer Geometrie.** D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Sei ABC ein Dreieck. Sei M der Mittelpunkt von AC und N der von BC. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A schneide MN im Punkt D.

Zeigen Sie



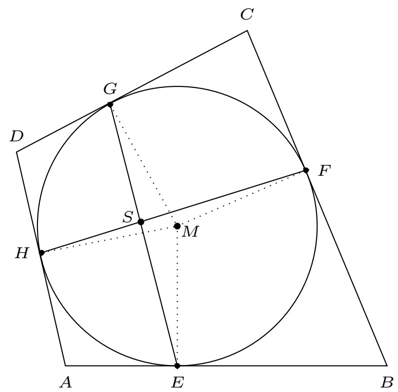
(i) $g_{MN} \parallel g_{AB}$

(ii) $|MD| = |MA|$

(iii) $\sphericalangle ADC = 90°$

Aufgabe 2 (5=1.5+2+1.5)**. Lösen Sie mittels synthetischer euklidischer Geometrie.** D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Sei $ABCD$ ein Viereck und k ein Kreis, so dass die Seiten des Vierecks alle den Kreis berühren, vgl. Abbildung. Die Berührpunkte seien wie im Bild mit $EFGH$ bezeichnet.



(i) Zeigen Sie, dass $\sphericalangle SGC = \sphericalangle SEB$ sowie $\sphericalangle SHA = \sphericalangle SFB$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sphericalangle HAE + \sphericalangle GCF + 2\sphericalangle HSE = 360°$.

(iii) Verwenden Sie (ii) um folgende Aussage fertig zu formulieren und zu beweisen:

Das Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Sehnen HF und GE ____________________.

Aufgabe 3 (6=3+3)**.** Zeigen Sie jeweils mittels **analytischer Geometrie**:

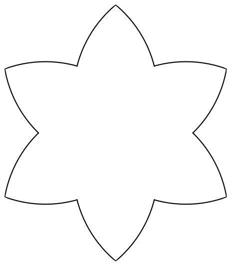
(i) Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms.

(ii) Sei ABC ein Dreieck. Sei w die Winkelhalbierende des Außenwinkels bei A (Außenwinkel bei A = Nebenwinkel zum Innenwinkel bei A). Die Gerade w und die Gerade durch B und C schneiden sich in D. Dann gilt:

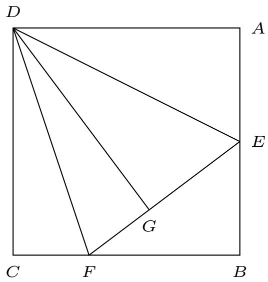
$$\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|AB|}.$$

Aufgabe 4 (5=3+2)**. Symmetrien**

(i) Geben Sie durch explizites Aufzählen aller Elemente die Symmetriegruppe von folgender Figur an (mit Begründung). Wieviele Elemente hat diese?



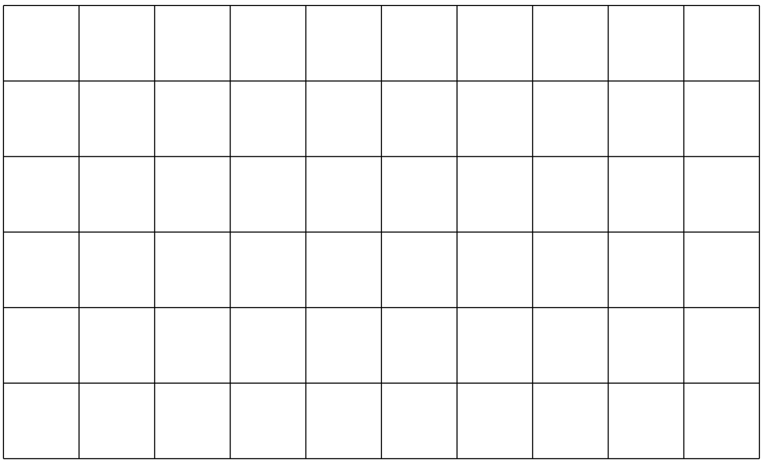
(ii) Im Quadrat $ABCD$ sei $E \in \overline{AB}$ und $F \in \overline{CB}$ derart, dass $\sphericalangle FDE = 45°$. Sei DG im Dreieck DEF die Höhe auf EF. Verwenden Sie die Drehung um D um $90°$ im Uhrzeigersinn, um zu zeigen, dass $|CD| = |DG|$ ist.



Aufgabe 5 (8=2+2+2+2)**. Hyperbolische Geometrie**

Wir betrachten in der hyperbolischen Halbebene die Geraden $g_r = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x-4)^2+y^2 = r^2\}$ für $r > 0$ und die Gerade h durch die Punkte $A = 3\mathrm{i}$ und $B = 5\mathrm{i}$.

(i) Zeichnen Sie A, B, h, g_1 und g_5 ins Koordinatensystem (dafür die Achsen geeignet beschriften) ein.



(ii) Geben Sie die Definition an, wann zwei Geraden parallel sind. Für welche r sind g_r und h parallel?

(iii) Berechnen Sie $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(A, B)$.

(iv) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Gleichung der (hyperbolischen) Geraden durch $B = 5\mathrm{i}$ und $C = 4 + \mathrm{i}$.

Aufgabe 6 (5=3+2)**. Sphärische Geometrie**
Seien $A, B \in S^2$ mit $A \neq \pm B$.

(i) Wir betrachten die Menge

$$X := \{C \in S^2 \mid d_S(A, C) = d_S(B, C)\}.$$

Zeigen Sie, dass X ein Großkreis ist, der den Großkreis durch A und B senkrecht schneidet.

(ii) Zeigen Sie, dass es für jedes sphärische Dreieck DEF einen Punkt O mit

$$d_S(D, O) = d_S(E, O) = d_S(F, O)$$

gibt. Ist dieser Punkt eindeutig? Begründen Sie.

Aufgabe 7 (6=1.5+1.5+3)**. Axiomatik**
Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen $(P, G, \mathcal{A}, K)$ gegeben.

(i) Definieren Sie den Begriff der Kongruenzgruppe K.

(ii) Seien $A, B \in P$. Definieren Sie die Verschiebung v_{AB}.

(iii) Sei $A \neq B$ und g die Gerade durch A und B. Zeigen Sie, dass $s_g v_{AB} s_g = v_{AB}$ ist.

Aufgabe 8 (8=1.5+1+3+2.5)**. Axiomatik**

(i) Sei (P, G) eine Inzidenzgeometrie mit Anordnung $\mathcal{A}$. Geben Sie die Definition, wann man $(P, G, \mathcal{A})$ eine angeordnete Inzidenzgeometrie nennt (Geben Sie nicht nur den Namen des zugehörigen Axioms an, sondern auch den Inhalt.).

(ii) Sei g eine Gerade und $p, q \in P \setminus g$. Definieren Sie, wann p und q auf gleicher Seite von g liegen.

Von nun an sei $(P, G, \mathcal{A})$ eine angeordnete Inzidenzgeometrie.

(iii) Seien nun g und h zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden. Für $p, q \in P \setminus (g \cup h)$ schreiben wir $p \sim_n q$ genau dann, wenn p und q sowohl auf der gleichen Seite von g als auch von h liegen.

Zeigen Sie, dass $\sim_n$ auf $P \setminus (g \cup h)$ eine Äquivalenzrelation ist.

(iv) Gibt es eine angeordnete Inzidenzgeometrie, für welche die Anzahl an Äquivalenzklassen für die Äquivalenzrelation $\sim_n$ aus (iii) gleich 0, 1, 4 oder 5 ist. Begründen Sie.

Aufgabe 9 (2)**.** Der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC liege im Inneren dieses Dreiecks. Sei H' die Spiegelung von H an der Geraden durch B und C. Zeigen Sie, dass H' auf dem Umkreis von ABC liegt.