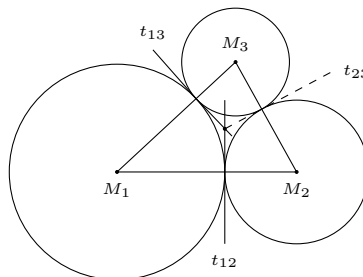


Bearbeitungszeit: 3h

Aufgabe 1 (5=2+3). Lösen Sie mittels **synthetischer euklidischer Geometrie**. D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

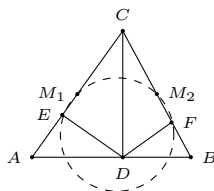
Seien M_1 , M_2 und M_3 drei Punkte in der euklidischen Ebene, die nicht alle drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Sei k_i der Kreis um den Mittelpunkt M_i mit Radius $r_i > 0$.



- (i) Zeigen Sie, dass die r_i immer so gewählt werden können, dass sich die Kreise k_i paarweise (von außen) berühren, vgl. Abbildung. Berechnen Sie dazu die Radien r_i in Abhängigkeit von $|M_1M_2|$, $|M_1M_3|$ und $|M_2M_3|$.
- (ii) Seien die r_i nun so gewählt, dass sich die Kreise k_i paarweise berühren. Sei t_{ij} die gemeinsame Tangente der Kreise k_i und k_j für $i < j$. Zeigen Sie, dass sich die Tangenten t_{12} , t_{13} und t_{23} dann in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2 (7=2+1+4). Lösen Sie mittels **synthetischer euklidischer Geometrie**. D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Sei ABC ein Dreieck. Sei M_1 der Mittelpunkt von AC und M_2 der Mittelpunkt von BC . Sei D der Fußpunkt des Lotes von A auf BC und D liege zwischen B und C . Sei E der Fußpunkt des Lotes von D auf AC . Sei F der Fußpunkt des Lotes von D auf BC , vgl. Abbildung.



- (i) Zeigen Sie, dass $\angle M_2M_1C = \angle BAC$ ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass $CEDF$ ein Sehnenviereck ist.
- (iii) Es liege E wie im Bild zwischen A und M_1 und F zwischen B und M_2 . Zeigen Sie, dass dann M_1M_2FE auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

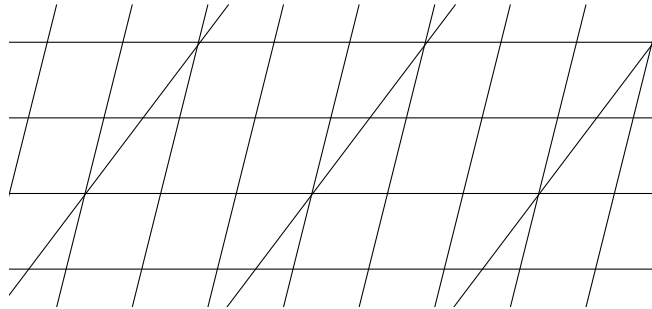
Aufgabe 3 (5=2+3). Lösen Sie mittels **analytischer Geometrie**:

- (i) Beweisen Sie: In einem Rhombus/Raute (= Parallelogramm mit gleich langen Seiten) stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.
- (ii) Sei ABC ein Dreieck. Die Winkelhalbierende des Dreiecks bei A schneide die Seite BC in E . Sei $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$. Zeigen Sie

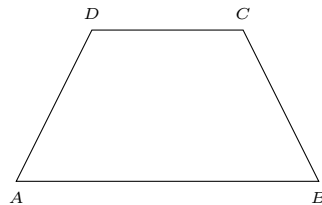
$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{c}{b}$$

Aufgabe 4 (5=3+2). Symmetrien

- (i) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Symmetriegruppe der folgenden Figur (das Muster sei in alle Richtungen periodisch fortgesetzt)



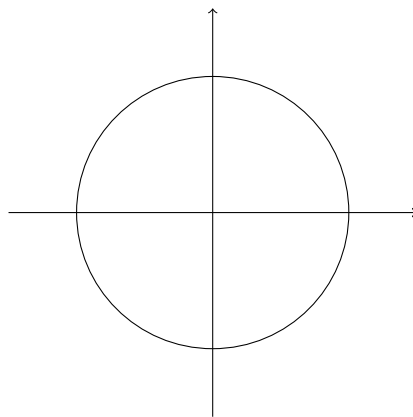
- (ii) Sei $ABCD$ ein Trapez, so dass $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel sind und $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gleich lang, aber nicht parallel sind, vgl. Abbildung. Benutzen Sie eine Verschiebung um $\overrightarrow{DC}$, um zu zeigen, dass die Innenwinkel des Trapezes bei A und B gleich groß sind.



Aufgabe 5 (8=2+2+4). Hyperbolische Geometrie

Wir betrachten das Poincaresche Modell $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ der hyperbolischen Ebene. Sei $v = i$.

- (i) Sei $u \in \{\pm 1, e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}, -i\}$. Zeichnen Sie für alle diese 7 u die Gerade ein, die u und v als Randpunkte hat.

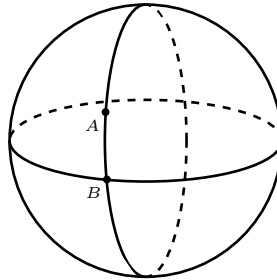


- (ii) Zeigen Sie, dass alle Geraden, für die ein Randpunkt v ist, die Form $g_r = k_r \cap \mathbb{D}$ für ein $r \in \mathbb{R}$ haben, wobei $k_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - r)^2 + (y - 1)^2 = r^2\}$ für $r \neq 0$ und $k_0 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ist.
- (iii) Bestimmen Sie, welche Geraden g_r die Gerade $h = \{(x, 0) \mid x \in (-1, 1)\}$ schneiden und bestimmen Sie für diese den Schnittpunkt P_r und den Tangens des Schnittwinkels der Geraden g_r und h . Berechnen Sie außerdem $d_{\mathbb{H}}(0, P_r)$.

Aufgabe 6 (5=1+1+3). **Sphärische Geometrie**

Seien $A, B \in S^2$, $A \neq B$, und sei $C = \frac{A \times B}{|A \times B|} \in S^2$.

- (i) Zeichnen Sie ins Bild für das dort gegebene A und B das zugehörige C ein.



- (ii) Zeigen Sie, dass ABC genau dann ein sphärisches Dreieck ist, wenn $A \neq \pm B$ ist.
- (iii) Sei $A \neq \pm B$. Zeigen Sie, dass ABC gleichschenkelig (also zwei gleich lange Seiten besitzt) ist. Bestimmen Sie die Seitenlänge AC und die Innenwinkel des Dreiecks.

Aufgabe 7 (5=1+4). **Axiomatik**

- (i) Geben Sie die Definition an, wann zwei Punkte auf der gleichen Seite einer Gerade liegen.
- (ii) Sei A, B, C, D vier Punkte einer angeordneten Inzidenzgeometrie gegeben. Es liegen
- (a) B und C auf derselben Seite von g_{AD}
 - (b) D und C auf derselben Seite von g_{AB}
 - (c) A und C auf verschiedenen Seiten von g_{BD}

Zeigen Sie, dass es dann einen Punkt $F \in \overline{AC} \cap g_{BD}$ gibt, der insbesondere auch in $\overline{BD}$ liegt.

Aufgabe 8 (7= 2+(1+1+3)). **Axiomatik**

Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen gegeben.

- (i) Geben Sie die Definition für Winkel in einer angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen an und wann zwei solcher Winkel kongruent sind.
- (ii) Wir führen folgende Relation auf der Menge der Winkel ein:

Es gelte $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(L_1, L_2)$ genau dann, falls es eine Kongruenzabbildung k mit $k(\sphericalangle(H_1, H_2)) \subseteq \sphericalangle(L_1, L_2)$ und $k(H_1 \cap H_2) = L_1 \cap L_2$ gibt.

Zeigen Sie, dass für alle Winkel $\sphericalangle(H_1, H_2)$ und $\sphericalangle(R_1, R_2)$ gilt:

- (a) $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$
- (b) Aus $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(R_1, R_2)$ und $\sphericalangle(R_1, R_2) \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$, folgt $\sphericalangle(H_1, H_2) = \sphericalangle(R_1, R_2)$.
- (c) Es gilt $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(R_1, R_2)$ oder $\sphericalangle(R_1, R_2) \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$ (d.h. je zwei Winkel sind vergleichbar).

Aufgabe 9 (3). Sei ABC ein euklidisches Dreieck. Sei k_1 ein Kreis, der g_{BC} in B berührt und durch A geht. Sein Radius sei p . Sei k_2 ein Kreis der g_{BC} in C berührt und durch A geht. Sein Radius sei q . Sei R der Radius des Umkreises. Zeigen Sie

$$pq = R^2.$$