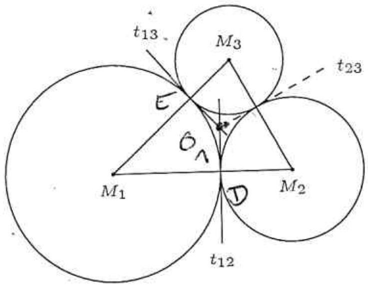
Aufgabe 1 (5=2+3). **Lösen Sie mittels synthetischer euklidischer Geometrie.** D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Seien M_1, M_2 und M_3 drei Punkte in der euklidischen Ebene, die nicht alle drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Sei k_i der Kreis um den Mittelpunkt M_i mit Radius $r_i > 0$.



(i) Zeigen Sie, dass die r_i immer so gewählt werden können, dass sich die Kreise k_i paarweise (von außen) berühren, vgl. Abbildung. Berechnen Sie dazu die Radien r_i in Abhängigkeit von $|M_1M_2|$, $|M_1M_3|$ und $|M_2M_3|$.

(ii) Seien die r_i nun so gewählt, dass sich die Kreise k_i paarweise berühren. Sei t_{ij} die gemeinsame Tangente der Kreise k_i und k_j für $i < j$. Zeigen Sie, dass sich die der Tangenten t_{12}, t_{13} und t_{23} dann in einem Punkt schneiden.

(i) $|M_1M_2| = r_1 + r_2$, $|M_2M_3| = r_2 + r_3$, $|M_1M_3| = r_1 + r_3$

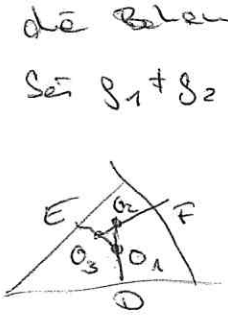
Damit ist
$$r_1 = \tfrac{1}{2}(|M_1M_2| + |M_1M_3| - |M_2M_3|)$$
$$r_2 = \tfrac{1}{2}(|M_1M_2| + |M_2M_3| - |M_1M_3|)$$
$$r_3 = \tfrac{1}{2}(|M_1M_3| + |M_2M_3| - |M_1M_2|)$$
alles > 0, wegen Dreiecksungleichung in $\triangle M_1M_2M_3$.

Also existieren die r_i immer und sind durch $|M_1M_2|$, $|M_2M_3|$ und $|M_1M_3|$ eindeutig bestimmt.

(ii) Sei $t_{12} \cap t_{13} = \{O_1\}$, $\{D\} = \overline{M_1M_2} \cap t_{12}$ und $\overline{M_1M_3} \cap t_{13} = \{E\}$.
Es ist $\measuredangle O_1EM_1 = 90° = \measuredangle O_1DM_1$ (da t_{12} bzw. t_{13} Tangente an k_1 in D bzw. E), $|DM_1| = |EM_1| = r_1$. Damit sind die Dreiecke O_1DM_1 und O_1EM_1 nach SSW$_g$ (da 90° größte Winkel im Dreieck und $|O_1M_1|$ in beiden Dreiecken vorkommt) kongruent. Also ist O_1M_1 Winkelhalbierende von $\measuredangle M_2M_1M_3$ und $\varrho_1 := |O_1D| = |O_1E|$.
Analog sieht man $\varrho_2 := |O_2D| = |O_2F|$ für $t_{12} \cap t_{23} = \{O_2\}$, $\overline{M_2M_3} \cap t_{23} = \{$
und $\varrho_3 := |O_3E| = |O_3F|$ für $\{O_3\} = t_{13} \cap t_{23}$.

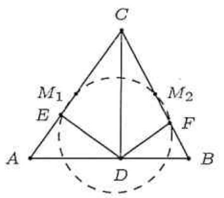
Ist $\varrho_1 = \varrho_2$, dann ist $O_1 = O_2$ und damit auch gleich O_3 und die Behauptung ist gezeigt.

Sei $\varrho_1 \neq \varrho_2$. O.B.d.A. sei $\varrho_1 < \varrho_2$.
Dann ist $|O_3E| < \overset{\varrho_1}{\overset{\shortparallel}{|O_1E|}} < \overset{\varrho_2}{\overset{\shortparallel}{|O_2D|}} = |O_2F| < |O_3F|$,
was den Widerspruch gibt.



Aufgabe 2 (7=2+1+4). **Lösen Sie mittels synthetischer euklidischer Geometrie.** D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Sei ABC ein Dreieck. Sei M_1 der Mittelpunkt von AC und M_2 der Mittelpunkt von BC. Sei D der Fußpunkt des Lotes von A auf BC und D liege zwischen B und C. Sei E der Fußpunkt des Lotes von D auf AC. Sei F der Fußpunkt des Lotes von D auf BC, vgl. Abbildung.



(i) Zeigen Sie, dass $\sphericalangle M_2M_1C = \sphericalangle BAC$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $CEDF$ ein Sehnenviereck ist.

(iii) Es liege E wie im Bild zwischen A und M_1 und F zwischen B und M_2. Zeigen Sie, dass dann M_1M_2FE auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

(i) ~~Strahlen~~ Es gilt: $\frac{|M_1C|}{|AC|} = \frac{1}{2} = \frac{|M_2C|}{|BC|}$ nach Wahl von M_1 bzw. M_2. Also ist $g_{M_1M_2} \parallel g_{AB}$ nach Umkehrung des Strahlensatzes. Damit gilt $\sphericalangle M_2M_1C = \sphericalangle BAC$ wegen Stufenwinkelsatz an geschnittenen Parallelen.

(ii). $\sphericalangle CED = 90^\circ = \sphericalangle CFD$. Also ist $\sphericalangle CED + \sphericalangle CFD = 180^\circ$ und $CEDF$ damit ein Sehnenviereck.

(iii) z.z. M_1M_2FE ist Sehnenviereck.
Dazu reicht es $\sphericalangle M_2M_1E + \sphericalangle M_2FE = 180^\circ$ zu zeigen.

Es ist $\sphericalangle M_2FE = \sphericalangle CFE \underset{\uparrow}{=} \sphericalangle CDE$.
Peripheriewinkel am Umkreis von $CEDF$ (existiert nach (ii)) über Sehne CE

und $\sphericalangle CDE \underset{\substack{\uparrow \\ \sphericalangle CED = 90^\circ}}{=} 90^\circ - \sphericalangle ACD \underset{\substack{\uparrow \\ \sphericalangle ADC = 90^\circ}}{=} \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC \underset{\substack{\uparrow \\ (i)}}{=} \sphericalangle M_2M_1C$

Also ist $\sphericalangle M_2M_1E + \sphericalangle M_2FE$
$= \sphericalangle M_2M_1E + \sphericalangle CDE = \sphericalangle M_2M_1E + \sphericalangle M_2M_1C = 180^\circ$

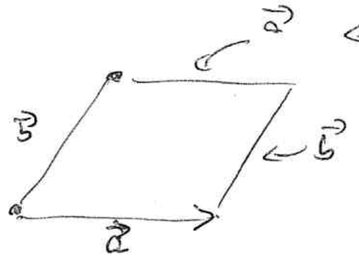
Aufgabe 3 (5=2+3). Lösen Sie mittels **analytischer Geometrie**:

(i) Beweisen Sie: In einem Rhombus/Raute (= Parallelogramm mit gleich langen Seiten) stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

(ii) Sei ABC ein Dreieck. Die Winkelhalbierende des Dreiecks bei A schneide die Seite BC in E. Sei $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$. Zeigen Sie

$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{c}{b}$$

(i)



← wegen Parallelogramm

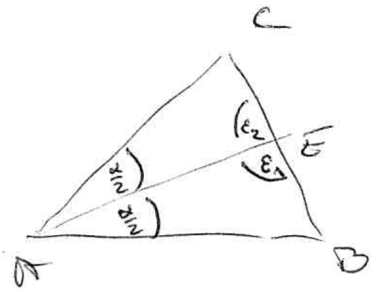
und es gilt $|\vec a| = |\vec b|$ (da Raute),

Die Diagonalen sind dann $\vec a + \vec b$ und $\vec b - \vec a$ und es folgt.

$$\langle \vec a + \vec b, \vec b - \vec a \rangle = \langle \vec a, \vec b \rangle + |\vec b|^2 - |\vec a|^2 - \langle \vec b, \vec a \rangle$$
$$= 0$$

Also stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

(ii)



Sei α der Winkel von $\triangle ABC$ bei A,
ε_1 der von $\triangle ABE$ bei E
ε_2 der von $\triangle ACE$ bei E.

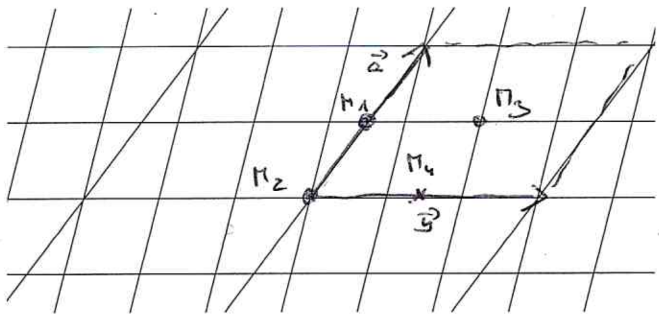
Sinussatz in $\triangle ABE$: $\quad \dfrac{|BE|}{|AB|} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin \varepsilon_1}$

Sinussatz in $\triangle ACE$: $\quad \dfrac{|CE|}{|AC|} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin \varepsilon_2} \underset{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 180^\circ}{=} \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin \varepsilon_1}$

Damit folgt $\dfrac{|BE|}{|EC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{c}{b}$.

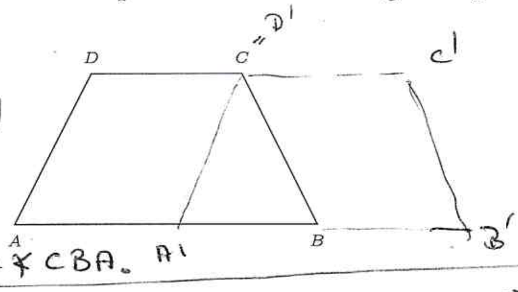
Aufgabe 4 (5=3+2). **Symmetrien**

(i) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Symmetriegruppe der folgenden Figur (das Muster sei in alle Richtungen periodisch fortgesetzt)



(ii) Sei $ABCD$ ein Trapez, so dass $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel sind und $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gleich lang, aber nicht parallel sind, vgl. Abbildung. Benutzen Sie eine Verschiebung um $\overrightarrow{DC}$, um zu zeigen, dass die Innenwinkel des Trapezes bei A und B gleich groß sind.

zu (ii) Sei $A'B'C'D'$ das verschobene Parallelogramm.
Dann ist $|AD| = |A'D'| = |A'C'|$
$= |BC|$
Also ist $A'BC$ gleichschenklig
und damit $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CA'B = \sphericalangle CBA$.



(i) • Verschiebungen werden durch die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugt.

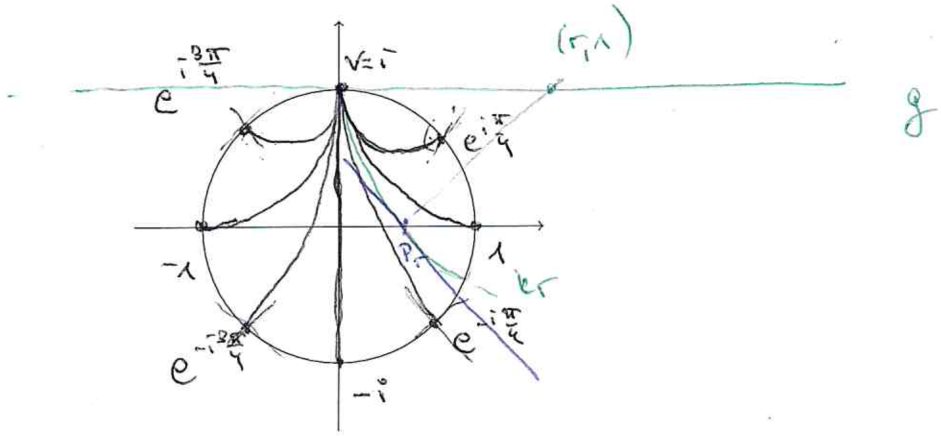
• Für jede Drehung findet man damit (durch Hintereinanderausführung mit einer geeigneten Drehung) eine Drehung mit Drehzentrum im (halboffenen eingezeichneten) Parallelogramm, was von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannt ist. Da bleiben vier Drehungen mit den eingezeichneten Mittelpunkten M_i um jeweils $180°$.

• Spiegelungen: Auch hier könnte man durch Hintereinanderausführung mit obiger Verschiebung nur erreichen, dass die Spiegelungsgerade durchs oben beschriebene Parallelogramm geht. Da gibt es keine. Gleiche Argumentation funktioniert bei Gleitspiegelungen.

Also wird die Symmetriegruppe durch Verschiebung um $\vec{a}$, um $\vec{b}$ und die Drehungen um M_i um $180°$ $(i=1,2,3,4)$ erzeugt.

Aufgabe 5 (8=2+2+4). **Hyperbolische Geometrie**
Wir betrachten das Poincaresche Modell $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ der hyperbolischen Ebene. Sei $v = \mathrm{i}$.

(i) Sei $u \in \{\pm 1, e^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, e^{\pm \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}, -\mathrm{i}\}$. Zeichnen Sie für alle diese 7 u die Gerade ein, die u und v als Randpunkte hat.



grünes: zu (ii)

blaues: zu (iii)

(ii) Zeigen Sie, dass alle Geraden, für die ein Randpunkt v ist, die Form $g_r = k_r \cap \mathbb{D}$ für ein $r \in \mathbb{R}$ haben, wobei $k_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-r)^2 + (y-1)^2 = r^2\}$ für $r \neq 0$ und $k_0 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ist.

(iii) Bestimmen Sie, welche Geraden g_r die Gerade $h = \{(x,0) \mid x \in (-1,1)\}$ schneiden und bestimmen Sie für diese den Schnittpunkt P_r und den Tanges des Schnittwinkels der Geraden g_r und h. Berechnen Sie außerdem $d_{\mathbb{H}}(0, P_r)$.

(ii) 1. Fall: Die Gerade durch v geht auch durch den Ursprung; das ist dann k_0

2. Fall: Die Gerade durch v geht nicht durch den Ursprung. Dann ist sie Teil eines Kreises der senkrecht auf dem Rand $\partial\mathbb{D}$ steht. Also ist k_0 Tangente an diesen Kreis. Also liegt der Mittelpunkt dieses Kreises auf $g = \{(a,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Sei $(r,1)$ dieser Mittelpunkt (dann muss $r \neq 0$ sein, da v nicht selbst Mittelpunkt sein kann). Da $|(r,1), v| = |r|$ ist, ist $|r|$ dann der Radius dieses Kreises. Der Kreis erfüllt also die Kreisgleichung k_r.

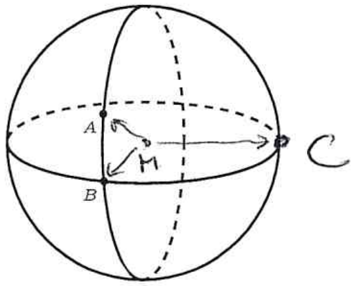
(iii) Sei $P_r = (x,0) \in k_r$. Dann gilt $(x-r)^2 + (0-1)^2 = r^2$, also $x^2 - 2xr + 1 = 0$. Damit ist $x = r \pm \sqrt{r^2-1}$. Es soll $x \in (-1,1)$ sein. Also muss $|r| > 1$ sein. Für $r \in (1,\infty)$ ist $x = r - \sqrt{r^2-1}$ die Lösung, für $r \in (-\infty,-1)$ ist es $x = r + \sqrt{r^2-1}$.

Es ist $d_{\mathbb{H}}(0,P_r) = \left|\ln\left|(0, r \pm \sqrt{r^2-1}, 1, -1)\right|\right| = \left|\ln\left|\frac{r \pm \sqrt{r^2-1} - 1}{r \pm \sqrt{r^2-1} + 1}\right|\right|$.

Die Tangente an k_r in P_r ist senkrecht zum Radius von k_r, also zur Gerade durch P_r und den Mittelpunkt $(r,1)$ von k_r. Letztere Gerade hat Anstieg $\pm\frac{1}{\sqrt{r^2-1}}$, also hat die Tangente Anstieg $\mp\sqrt{r^2-1}$, was gleich dem Tangens des Schnittwinkels ist,

Aufgabe 6 (5=1+1+3). **Sphärische Geometrie**
Seien $A, B \in S^2$, $A \neq B$, und sei $C = \frac{A \times B}{|A \times B|} \in S^2$.

(i) Zeichnen Sie ins Bild für das dort gegebene A und B das zugehörige C ein.



(ii) Zeigen Sie, dass ABC genau dann ein sphärisches Dreieck ist, wenn $A \neq \pm B$ ist.

(iii) Sei $A \neq \pm B$. Zeigen Sie, dass ABC gleichschenklig (also zwei gleichlange Seiten besitzt) ist. Bestimmen Sie die Seitenlänge AC und die Innenwinkel des Dreiecks.

(ii) Ist $A \neq \pm B$, dann ist der Großkreis durch A und B eindeutig bestimmt und C liegt auf der Ursprungsgeraden senkrecht durch die Ebene dieses Großkreises. Damit ist ABC dann ein sphärisches Dreieck.
Ist $A = -B$, dann gibt es für jeden weiteren Punkt (also insbesondere auch für C) einen gemeinsamen Großkreis mit A und B. Also kann ABC kein sphärisches Dreieck sein.

(iii) Da C auf der Ursprungsgeraden senkrecht zur Großkreisebene durch A und B liegt, ist damit

$$d_{S^2}(A,C) = d_{S^2}(B,C) = \frac{1}{4} \text{ Großkreislänge} = \frac{\pi}{2}$$

und $\beta := \sphericalangle ABC = 90°$, $\alpha := \sphericalangle BAC = 90°$

Es bleibt $\gamma = \sphericalangle ACB$ zu bestimmen. Dazu verwenden wir den Winkelkosinussatz:

$$\cos\gamma = -\underbrace{\cos\alpha}_{=0} \underbrace{\cos\beta}_{=0} + \underbrace{\sin\alpha}_{=1} \underbrace{\sin\beta}_{=1} \cos d_{S^2}(A,B)$$

also $\gamma = d_{S^2}(A,B)$.

Aufgabe 7 (5=1+4). **Axiomatik**

(i) Geben Sie die Definition an, wann zwei Punkte auf der gleichen Seite einer Gerade liegen.

(ii) Sei A, B, C, D vier Punkte einer angeordneten Inzidenzgeometrie gegeben. Es liegen

(a) B und C auf derselben Seite von g_{AD}

(b) D und C auf derselben Seite von g_{AB}

(c) A und C auf verschiedenen Seiten von g_{BD}

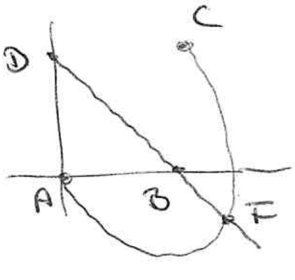
Zeigen Sie, dass es dann einen Punkt $F \in \overline{AC} \cap g_{BD}$ gibt, der insbesondere auch in $\overline{BD}$ liegt.

(i) Sei g Gerade und $p, q \notin g$. Dann liegen p und q auf der gleichen Seite von g, falls $\overline{pq} \cap g = \emptyset$.

(ii) Nach (c) liegen A und C auf verschiedenen Seiten von g_{BD}. Also gibt es einen Punkt $F \in \overline{AC} \cap g_{BD}$. Es bleibt zu zeigen, dass $F \in \overline{BD}$ ist: Da $F \in g_{BD}$ können drei Fälle auftreten,

(I) $B \in \overline{DF}$ (II) $D \in \overline{BF}$ (III) $F \in \overline{BD}$

Es gelte (I): Dann ist $B \in \overline{DF}$ und D und F liegen damit auf verschiedenen Seiten von g_{AB}. Da in einer angeordneten Inzidenzgeometrie auf derselben Seite einer Gerade liegen eine Äquivalenzrelation ist, liegt nach (b) auch D und F auf verschiedenen Seiten von g_{AB}. Damit gibt es $G \in \overline{CF} \subset \overline{AF}$ und insbesondere $G \neq A$. Damit liegen G und A beide auf g_{AB} und g_{AC}. Dann ist $g_{AB} = g_{AC}$ wegen (I1) und $C \in g_{AB}$, was ein Widerspruch zu (b) ist. Also kann (I) nicht gelten.



(II) geht analog (einfach überall B durch D und umgekehrt ersetzen und (b) durch (a)).

Also muss (III) $F \in \overline{BD}$ gelten.

Aufgabe 8 (7= 2+(1+1+3)). **Axiomatik**
Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen gegeben.

(i) Geben Sie die Definition für Winkel in einer angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen an und wann zwei solcher Winkel kongruent sind.

(ii) Wir führen folgende Relation auf der Menge der Winkel ein:

Es gelte $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(L_1, L_2)$ genau dann, falls es eine Kongruenzabbildung k mit $k(\sphericalangle(H_1, H_2)) \subseteq \sphericalangle(L_1, L_2)$ und $k(H_1 \cap H_2) = L_1 \cap L_2$ gibt.

schlecht formuliert – sollte kongruent heißen ⊥

Zeigen Sie, dass für alle Winkel $\sphericalangle(H_1, H_2)$ und $\sphericalangle(R_1, R_2)$ gilt:

(a) $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$

~~(b) Aus~~ $\cancel{\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(R_1, R_2)}$ ~~und~~ $\cancel{\sphericalangle(R_1, R_2)} \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$, folgt $\cancel{\sphericalangle(H_1, H_2)} = \cancel{\sphericalangle(R_1, R_2)}$.

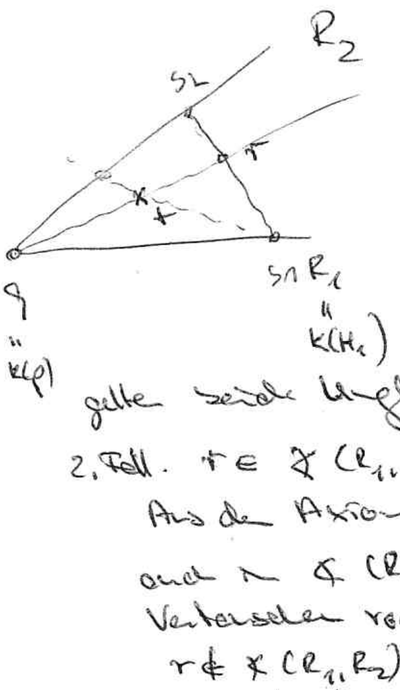
(c) Es gilt $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(R_1, R_2)$ oder $\sphericalangle(R_1, R_2) \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$ (d.h. je zwei Winkel sind vergleichbar).

(i) Sei p ein Punkt und H_1, H_2 Halbgeraden, die in p starten.
Der Winkel $\sphericalangle(H_1, H_2)$ ist die Menge $\{s \in P \mid \exists\, q, r \in H_1 \cup H_2 : s \in \overline{qr}\}$.
↑ Menge der Punkte

Zwei Winkel $\sphericalangle(H_1, H_2)$ und $\sphericalangle(L_1, L_2)$ heißen kongruent, falls es eine Kongruenzabbildung k mit $k(\sphericalangle(H_1, H_2)) = \sphericalangle(L_1, L_2)$ gibt.

(ii) (a) Folgt aus Definition mit $k = id$.

(c) Sei k die eindeutige Kongruenzabbildung, die H_1 auf R_1 abbildet und $H_2 \setminus \{p\}$ ($\{p\} = H_1 \cap H_2$) auf die ~~$R_2 \setminus \{q = k(p)\}$~~ gleiche Halbebene zur Geraden durch R_1 abbildet, wo $R_2 \setminus \{q = k(p)\}$ liegt. Da k Kongruenz, ist $k(H_2)$ eine Halbgerade, die in q startet. Sei $r \in k(H_2) \setminus \{q\}$.



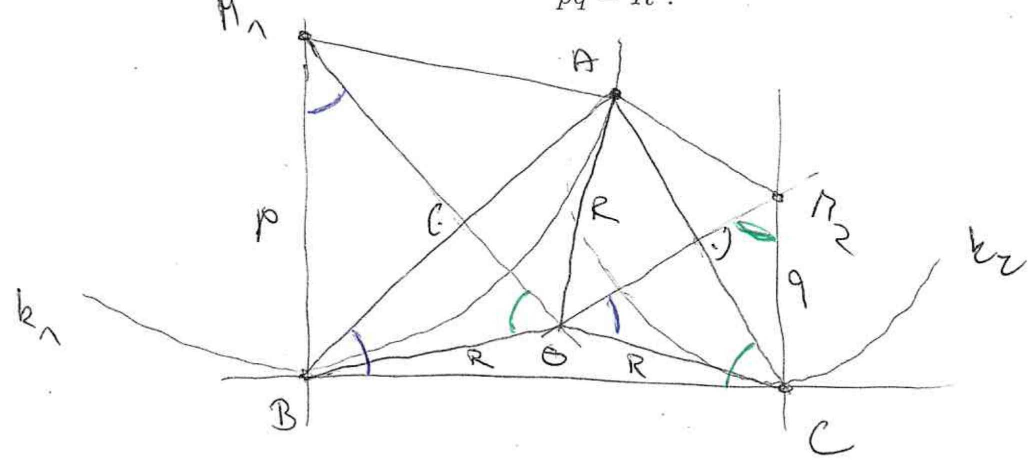
1. Fall. $r \in R_2$. Dann ist $k(H_2) = R_2$ nach (I1) und da beide Halbgeraden auf der gleichen Seite zu H_1 liegen. Also ist $\sphericalangle(H_1, H_2)$ kongruent zu $\sphericalangle(R_1, R_2)$ und es gelten beide Ungleichungen.

2. Fall. $r \in \sphericalangle(R_1, R_2) \setminus R_2$. Dann gibt es $s_1, s_2 \in R_1 \cup R_2$ mit $r \in \overline{s_1 s_2}$. Aus dem Axiom von Pasch folgt, dass jeder Punkt $t \in \overline{qr}$, denn auch in $\sphericalangle(R_1, R_2)$ liegt. ~~So [illegible]~~ Analog durch Vertauschen von der Rolle von $k(H_2)$ und R_2 [illegible] wenn ist $r \notin \sphericalangle(R_1, R_2)$, dann auch alle Punkte in $\overline{qr} \setminus \{q\}$ nicht.
Also ist $k(H_2) \subseteq \sphericalangle(R_1, R_2)$ und damit $\sphericalangle(H_1, H_2) \subseteq \sphericalangle(R_1, R_2)$.

3. Fall. $r \notin \sphericalangle(R_1, R_2) \setminus R_2$ aber auf gleicher Seite von H_1 wie R_2. Analoge Argumentation wie im 2. Fall liefert. $\sphericalangle(R_1, R_2) \subseteq \sphericalangle(H_1, H_2)$.

Aufgabe 9 (3). Sei ABC ein euklidisches Dreieck. Sei k_1 ein Kreis, der g_{BC} in B berührt und durch A geht. Sein Radius sei p. Sei k_2 ein Kreis der g_{BC} in C berührt und durch A geht. Sein Radius sei q. Sei R der Radius des Umkreises. Zeigen Sie

$$pq = R^2.$$



Sei O der Umkreismittelpunkt von ABC (dann ist $R = |OA| = |OB| = |OC|$).

Sei M_i der Mittelpunkt von k_i.

M_1, O liegen beide auf Mittelsenkrechte zu $|AB|$
und $M_2 O$ — " — $|AC|$.

Damit ist $\sphericalangle M_1 O B = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$
$\sphericalangle M_2 O C = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC$.

Nach Peripheriezentriwinkelsatz ist $\sphericalangle AOB = 2 \sphericalangle ACB$
$\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle ABC$.

Also zusammen $\sphericalangle M_1 O B = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle M_2 O C = \sphericalangle ABC$

Es ist $\sphericalangle M_1 BC = 90°$ und damit $\sphericalangle ABM_1 = 90° - \sphericalangle ABC$,
Da $M_1 O$ eine Mittelsenkrechte auf AB ist $\sphericalangle OM_1B = 90° - \sphericalangle ABM_1$,
also $\sphericalangle OM_1B = \sphericalangle ABC$. Analog $\sphericalangle OM_2C = \sphericalangle ACB$.

Somit sind BOM_1 und COM_2 ähnlich dann.

$$\frac{p}{R} = \frac{|M_1B|}{|BO|} = \frac{\sin \sphericalangle ACB}{\sin \sphericalangle ABC} = \left(\frac{|M_2C|}{|CO|}\right)^{-1} = \left(\frac{q}{R}\right)^{-1}$$

Also $pq = R^2$.