Elementargeometrie — Marius Amann, Katharina Böcherer-Linder, Nadine Große
SS24

Übungsblatt 1

Abgabe bis 29.4. um 10 Uhr

Aufgabe 1 (2+1,5+1,5)**.** Ziel dieser Aufgabe ist es folgenden Satz zu beweisen:

Peripherie-Zentriwinkelsatz. Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt M und sei AB eine Sehne in K. Ein Peripheriewinkel über AB, welcher in der gleichen Halbebene zur Geraden durch A und B liegt wie M, ist immer halb so groß wie der Zentriwinkel über AB.

(i) Öffnen Sie die Geogebra-Datei zu dieser Aufgabe (in der Fußnote[1]/bzw. auf der Webseite). Durch Bewegen des roten Schiebereglers sehen Sie die Beweisfiguren für verschiedene Schritte. Schreiben Sie den Beweis des Satzes für die Situation im Bild auf (Dabei alle Größen auch unabhängig vom Bild einführen).

(ii) Bewegen Sie nun mittels des blauen Schiebereglers den Punkt C zwischen A und B hin und her. Funktioniert ihr Beweis aus (i) in allen Situationen? Wenn nicht, was muss gelten, damit ihr Beweis in (i) funktioniert? Was bleiben für ein Fall/Fälle? Führen Sie dafür einen Beweis ähnlich wie in (i).

(iii) Beweisen Sie, dass ein Peripheriewinkel über AB, welcher in der anderen Halbebene zur Geraden durch AB liegt als der Zentriwinkel über AB, die Größe $180° - \text{Zentriwinkel}/2$ hat.

Aufgabe 2 (2+2+1)**.** In dieser Aufgabe wollen wir zeigen:

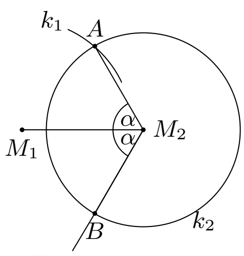
Für $i \in \{1, 2\}$ sei k_i ein Kreis mit Mittelpunkt M_i. Dann können genau drei Fälle auftreten: k_1 und k_2 haben keinen, genau einen oder genau zwei Punkte gemeinsam. Im zweiten Fall haben die beiden Kreise in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente und der Schnittpunkt liegt auf der Geraden $g_{M_1M_2}$. Im dritten Fall steht die Gerade durch diese beiden Schnittpunkte senkrecht auf $g_{M_1M_2}$ und die beiden Schnittpunkte liegen auf verschiedenen Seiten von $g_{M_1M_2}$.

Für den Beweis dürfen wir alles verwenden, was im Skript davor kommt, d.h. insbesondere den Kongruenzsatz (SWS) und (WSW) (aber nicht (SSWg) oder (SSS)):

1. Fall: Die beiden Kreise haben keinen Schnittpunkt. Das tritt auf, wenn $|M_1M_2| > r_1 + r_2$ ist.

(i) Füllen Sie die Begründungen für den Beweis der Aussagen zum zweiten Fall ein.

2. Fall: Sei nun $k_1 \cap k_2 = \{A\}$.
Angenommen A liegt nicht auf $g_{M_1M_2}$. Sei α der Winkel, den AM_2 mit ______ einschließt. Dann ist $\alpha \in (\_\_, \_\_\_\_)$. Sei B der Punkt auf k_2, der ______________________________ _________ und für den BM_2 und M_1M_2 auch den Winkel α einschließen. Dann sind die Dreiecke AM_2M_1 und BM_2M_1 kongruent nach _____. Deshalb ist $|AM_1| = |BM_1|$ und damit $B \in$ ______. Da B und A auf anderen Seiten von $g_{M_1M_2}$ liegen, ist ______, was den Widerspruch zu $k_1 \cap k_2 = \{A\}$ gibt. Also liegt A auf ______.



Die Tangente t_i ($i \in \{1, 2\}$) zu k_i durch A steht nach Lemma ____ _________ auf g_{AM_i}. Da $g_{AM_i} =$ ______ ist, ist damit $t_1 = t_2$ die gemeinsame Tangente.

(ii) Zeigen Sie die Aussage zum 3. Fall.

(iii) Zeigen Sie, dass kein weiterer Fall auftritt.

[1] https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/ElemGeo/geogebra-ua1.ggb

Aufgabe 3A (3+2)**.** Sei k ein Kreis. Seien A, B, C, P Punkte auf k derart, dass $\sphericalangle ACB = 90°$ ist und P auf der anderen Seite der Geraden g_{AB} durch A und B liegt als C. Sei P_1 die Spiegelung von P an der Geraden g_{AC}[2] und sei P_2 die Spiegelung von P an der Geraden g_{BC}. Zeigen Sie:

(i) Die Punkte P_1, C und P_2 liegen auf einer Geraden.

Anleitung:

- Zeichnen Sie sich eine Beweisfigur mit einer möglichst generischen Lage der gegebenen Punkte (Es kann i.A. sein, dass es da mehrere Fälle gibt, siehe ÜA 1, tritt hier aber nicht auf.).
- Wie kann man zeigen, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen? Das Dreieck, was durch die drei Punkte gebildet wird, sollte entartet sein. D.h. ein Innenwinkel sollte 180° sein.
- Durch Einzeichnen einer geeigneten Verbindung gleichseitige Dreiecke finden und so Winkel bestimmen, die am Ende den 180° Winkel ergeben.

(ii) Die Gerade aus (i) ist genau dann Tangente an k im Punkt C, wenn $g_{AB} \perp g_{CP}$ ist.

Aufgabe 3B (1+2+2)**.** Folgende sieben Winkelsätze werden derzeit in Klasse 7 am Gymnasium behandelt (siehe Bildungsplan[3]):

- Winkelsummensatz für Dreiecke
- Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke
- Scheitelwinkelsatzfür sich schneidende Geraden
- Nebenwinkelsatz für sich schneidende Geraden
- Stufenwinkelsatz bei parallelen Geraden
- Wechselwinkelsatz bei parallelen Geraden
- Satz des Thales.

Für die Unterrichtsplanung ist es unverzichtbar, den logischen Aufbau zu kennen, d.h. zu wissen, welche Sätze sich aus welchen herleiten lassen.

(i) Leiten Sie den Scheitelwinkelsatz aus dem Nebenwinkelsatz her.

(ii) Gehen Sie nun davon aus, dass der Nebenwinkelsatz, der Stufenwinkelsatz und der Basiswinkelsatz gegeben sind. Erstellen Sie ausgehend von diesen drei Sätzen ein Pfeil-Schema, das die deduktive Struktur aller sieben Winkelsätze wiedergibt (Ein Pfeil verdeutlicht, dass ein Satz für den Beweis eines anderen Satzes benötigt wird).

(iii) In der Schule werden Nebenwinkelsatz, Stufenwinkelsatz und Basiswinkelsatz anschaulich begründet (Postulate der sinnlichen Wahrnehmung). Finden Sie solche anschaulichen Argumente.

[2] D.h. $g_{P_1P} \perp g_{AC}$, der Schnittpunkt sei D, und $|DP_1| = |DP|$ und P_1 liegt auf der Seite von g_{P_1P} als P.
[3] https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M/IK/7-8/03