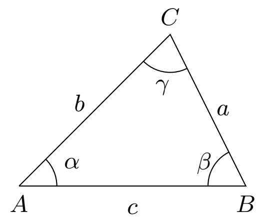
Übungsblatt 4

Abgabe bis 27.5. um 10 Uhr

Aufgabe 10 (2+1,5+1,5+2*)**.** Sind die Dreiecke mit folgenden gegebenen Größen bzw. Informationen eindeutig bestimmt? Begründen Sie (unter Verwendung synthetischer Geometrie). Die Bezeichnungen seien wie im Bild.

(i) $c - a > 0$, β, $\gamma = 90°$

Hinweis: $c-a$, derart von c abtragen, dass der neu entstandene Punkt mit zwei der Dreieckseckpunkte ein gleichschenkliges Dreieck bildet. So sollte man genug Informationen über Winkel erhalten, um zunächst ein Teildreieck eindeutig zu bestimmen.



(ii) $b - a > 0$, γ, Das Dreieck sei gleichschenklig mit Basis b.

(iii) $c - b > 0$, h_c (die Länge der Höhe von C auf c), α

(iv*) $a + b + c$, α, $\gamma = 90°$

Aufgabe 11A. ((1+1+1)+2) Zeigen Sie (unter Ausnutzung der Definition von $\sphericalangle$, den Eigenschaften des Skalarproduktes und Eigenschaften der Winkelfunktionen[1]):

(i) Sei pqr ein Dreieck mit $\sphericalangle pqr = \frac{\pi}{2}$. Dann gilt:

(a) $\cos \sphericalangle qpr = \frac{d(p,q)}{d(p,r)}$

(b) $d(p,r)^2 = d(p,q)^2 + d(q,r)^2$

(c) $\sin \sphericalangle qpr = \frac{d(r,q)}{d(p,r)}$

(ii) Seien p, q, r, s vier Punkte, so dass pqr und pqs jeweils nicht kollinear sind. Weiterhin liegen r und s auf verschiedenen Seiten der Geraden durch p und q. Zeigen Sie für den Fall $\sphericalangle spr < 180°$, dass dann $\sphericalangle spr = \sphericalangle spq + \sphericalangle qpr$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie als erstes den Fall, dass q, r und s auf einer Geraden liegen und $g_{pq} \perp g_{rs}$ gilt und benutzen Sie dafür (i) und das Additionstheorem aus der Fußnote. Begründen Sie, warum man den Fall $\sphericalangle spr < 180°$ zumindest immer darauf zurückführen kann.

[1]

(i) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

(ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Aufgabe 11B (1,5+1+2,5)**.**)Auch in der Schulmathematik wird viel mit dem Skalarprodukt gearbeitet. Die Berechnungsvorschrift für das Skalarprodukt möchte man im Unterricht aber nicht „vom Himmel fallen lassen“, sondern aus den Vorkenntnissen heraus entwickeln. Wie kommt man überhaupt darauf, den Ausdruck $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^3$ zu betrachten?

Ein möglicher Weg sieht folgendermaßen aus:

(i) Die Länge eines Vektors lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen. Stellen Sie nun mit Hilfe der Umkehrung des Satzes von Pythagoras eine Bedingung auf, wann zwei Vektoren zueinander senkrecht stehen. Was hat das mit dem Skalarprodukt zu tun?

(ii) Welche Eigenschaft hat das Skalarprodukt bei parallelen Vektoren? Berechnen Sie hierfür das Skalarprodukt der parallelen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und sowie $\vec{b} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$ das Produkt ihrer Längen. Unterscheiden Sie außerdem die Fälle $k > 0$ und $k < 0$.

(iii) Woher kommt die Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \alpha$, die sich in jeder Schulformelsammlung findet? Bearbeiten Sie zur Beantwortung dieser Frage die folgende Aufgabe des Mathematiklehrers Daniel Frohn (mathematik lehren 2020, Heft 218, S. 35):

Das Skalarprodukt im allgemeinen Fall

Erinnerung: *(1) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonale Vektoren, so ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*
(2) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallele gleich orientierte Vektoren, so ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$.
(3) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallele entgegengesetzt orientierte Vektoren, so ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Welche geometrische Bedeutung hat das Skalarprodukt im allgemeinen Fall?

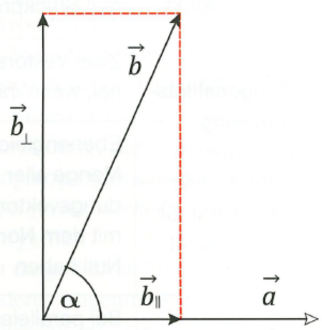
Aufgaben

a) Begründen Sie anhand der Abbildung, dass man für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ immer schreiben kann: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel)$

a) Vereinfachen Sie die Gleichung aus a) mithilfe des Distributivgesetzes für das Skalarprodukt und die Vektoraddition. Begründen Sie, dass das Distributivgesetz tatsächlich gilt.

b) Beschreiben Sie den Term $\vec{a} \cdot \vec{b}_\parallel$ mithilfe von $\cos(\alpha)$. Nehmen Sie dafür zunächst an, dass $\alpha < 90°$ ist und verallgemeinern Sie danach auf den Fall $\alpha > 90°$.

c) Formulieren Sie, welche geometrische Bedeutung das Skalarprodukt von zwei Vektoren hat.



Aufgabe 12. Beweisen Sie den Strahlensatz I.6.2 mit Hilfe analytischer Geometrie.