Übungsblatt 5

Abgabe bis 3.6. um 10 Uhr

Aufgabe 13A (2,5+2,5)**.**

(i) Ein Viereck heißt *Trapez*, wenn zwei seiner Seiten parallel sind.

Sei $ABCD$ ein Trapez mit $g_{AB} \parallel g_{CD}$. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{AD}$ und N der von $\overline{BC}$. Zeigen Sie, dass dann $g_{MN} \parallel g_{AB}$ ist.

(ii) Seien in der Ebene vier Punkte $ABCD$ markiert. Sei $a := |AB|$ und $b := |CD|$ und $|AC| = 1$. Beschreiben Sie eine Konstruktion, die nur mit einem Zirkel[1] und einem unmarkierten[2] Lineal auskommt, um eine Strecke der Länge ab zu konstruieren. Begründen Sie, warum Ihre Konstruktion, das gewünschte liefert.

Aufgabe 13B. Im Schulbuch „Anschauliche Geometrie 3“ von Barth, Krumbacher, Matschiner und Ossiander (1988) findet sich ein Beweis des Strahlensatzes mit elementaren Mitteln. Dabei wird die Strahlensatzfigur mit kongruenten Dreiecken ausgelegt. Lesen Sie den Beweis des Schulbuches (Scan auf ILIAS verfügbar) genau durch. Unter welcher Voraussetzung klappt der Beweis? Wann klappt er nicht und warum genau geht es dann schief?

Aufgabe 14. (Schwerpunkt mittels analytischer Geometrie) Sei ABC ein Dreieck. Sei s_C die Seitenhalbierende von C aus und s_B die von B aus. Sei S der Schnittpunkt von s_C und s_B. Rechnen Sie mittels analytischer Geometrie aus, dass S s_C (und auch s_B) im Verhältnis $1 : 2$ schneidet und folgern Sie, dass sich alle Seitenhalbierende in einem Dreieck in einem Punkt schneiden.

Hinweis: Führen Sie für zwei Seiten des Dreiecks Vektoren ein (diese sind bei einem (nichtentarteten) Dreieck insbesondere linear unabhängig). Stellen Sie ein Gleichung (mit den zu bestimmenden Schnittverhältnissen auf) für den Schwerpunkt auf.

Aufgabe 15. Beweisen Sie: Für jedes Dreieck ABC gibt es genau einen Punkt in der Ebene, so dass $|AP| + |BP| + |CP|$ minimal ist.

Hinweise: Nehmen Sie ein beliebigen Punkt P' und drehen Sie die Strecke CP' (und das ganze Dreieck ABC) um den Punkt A um $60°$. Welche Strecken sind nun gleich? Können Sie nun $|AP'| + |BP'| + |CP'|$ als (zusammenhängenden) Streckenzug irgendwo wieder finden. Wann wäre dieser Streckenzug minimal? Was bedeutet das für die Lage des gesuchten P? Können Sie die Lage von P durch einen analogen Vorgang um einen anderen Eckpunkt nun genau bestimmen?

[1] Mit dem Zirkel kann man schon vorher gegebene/konstruierte Strecken auf einer Geraden von einem gegebenen/konstruierten Punkt aus abtragen und Kreise mit einem gegebenen/konstruierten Punkt als Mittelpunkt und durch einen gegebenen/konstruierten Punkt gehend konstruieren.

[2] D.h. auf dem Lineal selbst, sind keine Streckenlängen markiert. Man kann das Lineal also nur nutzen, um für zwei gegebene/konstruierte Punkte die verbindende Gerade zu erhalten.