Übungsblatt 8

Abgabe bis 24.6. um 10 Uhr

Aufgabe 22A (1+2+2)**.**

(i) Zeigen Sie: Es gibt keine Rechtecke (= Vierecke, bei denen alle Innenwinkel 90° sind) in der hyperbolischen Ebene.

(ii) Ein *Pseudoquadrat* sei ein Viereck der hyperbolischen Ebene, deren Seitenlänge und Innenwinkel alle gleich groß sind.

Finden Sie alle Innenwinkel α (mit Begründung) für die es ein Pseudoquadrat gibt. Wie viele Pseudoquadrate gibt es dann für jedes dieser α bis auf Kongruenz?

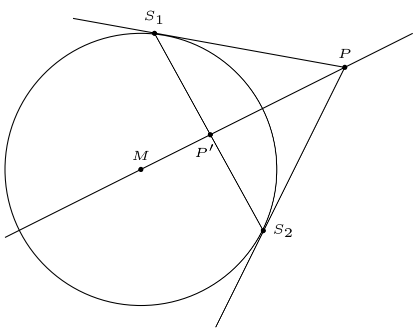
(iii) Mit welchen Pseudoquadraten kann die hyperbolische Ebene parkettiert werden?

Aufgabe 22B. Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal spielen in der Schule eine große Rolle. Dabei geht es auch darum, die mathematischen Zusammenhänge zu verstehen, die für die Konstruktion genutzt werden:

(i) Lösen Sie folgende typische Konstruktionsaufgabe aus der Schule (Lambacher Schweizer (2016). Mathematik für Gymnasien, Klasse 7, S. 137): „Zeichne einen Kreis um M mit Radius von $3,5$ cm und einen Punkt P mit $|MP| = 8$ cm. Konstruiere die Tangenten an den Kreis durch den Punkt P.“ Welchen Satz aus der (Schul-) Geometrie haben Sie hier verwendet?

(ii) Eine Konstruktion von Tangenten wie bei (i) ist Grundlage für die Konstruktion der Kreisspiegelung. Bei der Spiegelung eines Punktes P an einem Kreis mit Radius R und Mittelpunkt M gilt für den Bildpunkt P' folgende Bedingung:

$$|MP'| = \frac{R^2}{|MP|}$$



(a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Satzes aus der (Schul-) Geometrie, dass die Punkte P und P' aus der obigen Skizze die genannte Bedingung erfüllt.

(b) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Kreisspiegelung eines Punktes P an einem Kreis, für P innerhalb und für P außerhalb des Kreises. Formulieren Sie jeweils eine Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe 23 (2.5+2.5)**.**

(i) Sei $s_a\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto az$ $(a > 0)$ und $t_b\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto z+b$ $(b \in \mathbb{R})$. Sei $r_\alpha\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die Drehung um $0 \in \mathbb{D}$ um den Winkel α (entgegen dem Uhrzeigersinn.) Alle diese Abbildungen sind Kongruenzabbildungen für $\mathbb{H}$ bzw. $\mathbb{D}$.

Seien nun $p, q \in \mathbb{D}$, $p \neq q$. Finden Sie mittels geeigneter s_a, t_b, r_α und $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $p \mapsto \frac{p-\mathrm{i}}{p+\mathrm{i}}$, eine Kongruenzabbildung von $\mathbb{D}$, die p auf 0 und q auf $r \in [0,1) \subset \mathbb{D}$ mit $d_{\mathbb{D}}(p,q) = d_{\mathbb{D}}(0,r)$ abbildet.

(ii) Sei nun pqr ein Dreieck in $\mathbb{H}$. Begründen Sie, dass es immer ein zu pqr kongruentes Dreieck stu gibt, für welches s und t auf der Geraden $\{x = 0\}$ liegen und u die gleiche y-Koordinate wie s besitzt.

Aufgabe 24 (2+2+1)**.**

(i) Beweisen Sie, dass die Charakterisierung der Mittelsenkrechten der euklidischen Geometrie, Lemma I.5.2., auch in der hyperbolischen Geometrie gilt.

(ii) Zeigen Sie schneiden sich zwei der Mittelsenkrechten eines Dreiecks in der hyperbolischen Geometrie (d.h. die Dreiecksseiten sind Abschnitte hyperbolischer Geraden) in einem Punkt, dann geht auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt.

(iii) Schneiden sich in einem Dreieck in der hyperbolischen Geometrie immer die Mittelsenkrechten in einem Punkt? Begründen Sie.