Elementargeometrie — Marius Amann, Katharina Böcherer-Linder, Nadine Große
SS24

Übungsblatt 9

Abgabe bis 1.7. um 10 Uhr

Aufgabe 25A. Sei ABC ein sphärisches Dreieck, sei $A'B'C'$ das Polardreieck zu ABC. Zeigen Sie, dass dann ABC das Polardreieck zu $A'B'C'$ ist.

Hinweis: Sei $A''B''C''$ das Polardreieck zu $A'B'C'$. Zeigen Sie, dass $C'' = C$ ist, z.B. indem Sie zunächst $C'' \in \{\pm C\}$ durch Bestimmung der senkrechten Ebene zum Vektor C bzw. C'' zeigen. Ob $+$ oder $-$ gilt, kann durch Berechnung von $\sphericalangle(C, C'')$ bestimmt werden.

Aufgabe 25B. (1+1+1+2) Auf der nächsten Seite. Beachten Sie bitte auch die Erklärung im Tutorat.

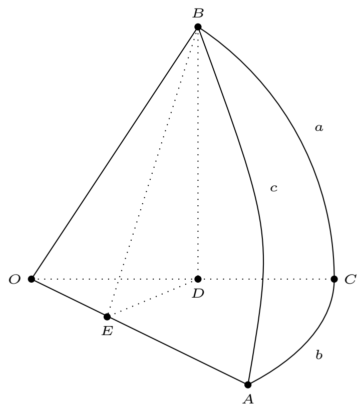
Aufgabe 26 (2+3)**.** Sei O der Mittelpunkt von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Sei ABC ein sphärisches Dreieck auf S^2 mit den Winkelgrößen α, β bzw. γ bei den Ecken A, B bzw. C. Sei D der Punkt in der Ebene, die durch O, A und C gebildet wird, so dass DB senkrecht auf dieser Ebene ist. Sei E der Punkt auf der Geraden g_{OA} mit $g_{BE} \perp g_{OA}$. Sei $\gamma = 90°$.

(i) Begründen Sie

(a) $D \in \overline{OC}$[1]

(b) $\overline{DE} \perp \overline{OA}$

(c) $\sphericalangle BED = \alpha$



(ii) Rechnen Sie mit Hilfe von (i) und trigonometrischen Beziehungen in den verschiedenen rechtwinkligen (euklidischen) Dreiecken direkt nach (Also nicht die Sätze der sphärischen Geometrie aus der Vorlesung verwenden!), dass

$$\cos c = \cos a \cos b \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$$

gilt.

Aufgabe 27 (1+(2+2))**.** Gegeben sei eine Inzidenzstruktur, die die Inzidenzaxiome (I1)-(I3) erfüllt.

(i) Füllen Sie den Lückentext:

Für je zwei nichtparallele Geraden gibt es genau einen Punkt der auf diesen beiden Geraden liegt.

Beweis. Seien g und h die zwei nichtparallelen Geraden. Nach ____________________ muss es damit mindestens einen Punkt p geben, der ______________________________ Wir müssen nun zeigen, dass dies der einzige solche Punkt ist. Das zeigen wir mit einem ____________ beweis. Sei dazu auch q ein Punkt der auf g und h liegt mit q __ p. Nach ___ gibt es genau eine Gerade, auf der p und q liegen, also muss g __ h sein, was den ____________ dazu gibt, dass g und h _________________ $\square$

(ii) Zeigen Sie die folgenden Aussagen und spezifizieren Sie dabei in jedem Schritt, welches Axiom sie verwenden.

(a) Für jeden Punkt gibt es mindestens zwei verschiedene Geraden, so dass der Punkt auf beiden liegt.

(b) Sei g eine Gerade. Dann gibt es Geraden h, ℓ, so dass g, h und ℓ paarweise verschieden sind und so dass sowohl h als auch ℓ die Gerade g schneiden. liegt.

[1] Alle Aussagen in dieser Aufgabe (i) sind Aussagen über Punkte in einer Ebene und dafür gelten die Definitionen aus der euklidischen Ebene. Auch die Winkel $\sphericalangle$ sind hier immer die euklidischen Winkel, in der von den drei angegebenen Punkten aufgespannten Ebene.

Zu Aufgabe 25B
Bitte lesen Sie die Informationen auf der **Einverständniserklärung** (in Ilias verfügbar) und geben diese gemeinsam mit der Bearbeitung der Aufgabe 25B ab. Wenn Sie damit nicht einverstanden sind, die Aufgabe aber trotzdem abgeben und gewertet haben wollen, geben Sie die Aufgabe mit Ihrem/Ihren Namen ab, aber auch auf einem Extrablatt in der unten beschriebenen Weise.

Zur anonymisierten Auswertung bearbeiten Sie die Aufgabe 25B bitte auf einem **separaten Blatt** und schreiben Sie auf dieses bitte folgende **Code-Kombination** aus Buchstaben und Ziffern.

1. Der erste Buchstabe des Vornamens Ihrer Mutter
2. Die letzten zwei Ziffern Ihrer Handynummer
3. Der erste Buchstabe Ihrer Heimatstadt

Beispiel: Name Ihrer Mutter: Claudia, Ihre Telefonnummer: 01769856734, Ihre Heimatstadt: Hamburg
Code-Kombination: C34H

Falls Sie die Aufgabe zu zweit oder dritt bearbeitet haben, schreiben Sie bitte die Code-Kombinationen aller Personen auf das Blatt. Die Abgabe soll dann eine pdf-Datei sein, die die Lösung und die Einverständniserklärungen aller Personen enthält. Für die Abgabe dieser Aufgabe gibt es *in Ilias eine Extra-Abgabe für alle Gruppen gemeinsam.* Falls Sie nicht online abgeben, heften Sie die Einverständniserklärung(en) an die Lösung an.

Aufgabe 25B. (bitte auf separatem Blatt mit Angabe der Code-Kombination bearbeiten)
Im Rahmen eines interdisziplinären Projekts haben die Zehntklässler*innen in Erdkunde das Gradnetz, Großkreise und das Thema der Flugstreckenoptimierung im Sinne der Nachhaltigkeit behandelt. Daran anknüpfend machen die Schüler*innen in Mathematik nach einer Einheit zur Trigonometrie einen kleinen Exkurs in die Kugelgeometrie und beschäftigen sich dabei mit einigen anspruchsvollen Aufgaben und Fragen:

> *<u>Schulaufgabe 1:</u> Ein Flugzeug fliegt auf dem kürzeren Großkreisbogen von New York (41° N; 74° W) nach Rom (41° N; 12° E). Die Länge der Flugroute beträgt 6.889 km. Eine Woche später fliegt das Flugzeug erneut von New York nach Rom, allerdings muss es wegen eines Unwetters die Flugroute ändern und fliegt diesmal auf dem Breitenkreis. Berechne die Länge der Flugroute auf dem Breitenkreis und vergleiche mit der Länge der Großkreisroute! Der Erdradius beträgt 6.371 km.*

(i) Skizzieren Sie die Situation aus Schulaufgabe 1 und bearbeiten Sie diese mit schulmathematischen Mitteln. Welche mathematischen Vorkenntnisse benötigen die Schüler*innen zur Bearbeitung der Aufgabe?

(ii) Eine Schülerin fragt, ob die Länge der Großkreisroute immer kürzer ist als die Strecke auf dem Breitenkreis. Was antworten Sie? Wie würden Sie diesen mathematischen Sachverhalt für die Schüler*innen veranschaulichen?

> *<u>Schulaufgabe 2:</u> Ein anderes Flugzeug fliegt auf kürzestem Weg von Stockholm (59° N; 18° E) nach Kapstadt (34° S; 18° E). Welche besondere Lage hat in diesem Fall die kürzeste Flugroute? Berechne die Länge (vgl. Schulbuchaufgabe im Themenheft „Kugelgeometrie“, Lambacher-Schweizer Mathematisches Unterrichtswerk III, 1951, S.23, Nr. 11).*

(iii) Bearbeiten Sie die Schulaufgabe 2.

(iv) Nach der Bearbeitung von Schulaufgabe 2 fragt ein Schüler: „Meine Großeltern wohnen in Los Angeles (34° N; 118° W). Wie lang ist die kürzeste Flugstrecke von Frankfurt (50° N; 9° E) nach Los Angeles?“ Wie kann die Schülerfrage mithilfe der Sätze über sphärische Trigonometrie aus dem Skript gelöst werden? Berechnen Sie die Flugstrecke! (Tipp: Verwenden Sie das Dreieck mit den Eckpunkten Nordpol, Los Angeles und Frankfurt.)