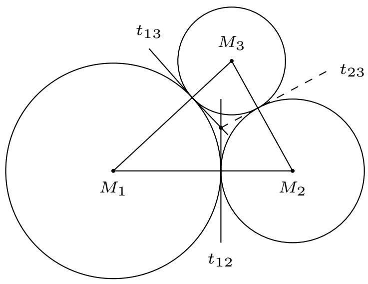
Übungsblatt 12 – Probeklausur

Aufgabe 1 (5=2+3)**. Lösen Sie mittels synthetischer euklidischer Geometrie.** D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Seien M_1, M_2 und M_3 drei Punkte in der euklidischen Ebene, die nicht alle drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Sei k_i der Kreis um den Mittelpunkt M_i mit Radius $r_i > 0$.

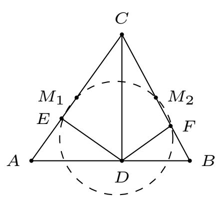


(i) Zeigen Sie, dass die r_i immer so gewählt werden können, dass sich die Kreise k_i paarweise (von außen) berühren, vgl. Abbildung. Berechnen Sie dazu die Radien r_i in Abhängigkeit von $|M_1M_2|$, $|M_1M_3|$ und $|M_2M_3|$.

(ii) Seien die r_i nun so gewählt, dass sich die Kreise k_i paarweise berühren. Sei t_{ij} die gemeinsame Tangente der Kreise k_i und k_j für $i < j$. Zeigen Sie, dass sich die der Tangenten t_{12}, t_{13} und t_{23} dann in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2 (7=2+1+4)**. Lösen Sie mittels synthetischer euklidischer Geometrie.** D.h. insbesondere, dass sich hier alles auf die euklidische Ebene bezieht.

Sei ABC ein Dreieck. Sei M_1 der Mittelpunkt von AC und M_2 der Mittelpunkt von BC. Sei D der Fußpunkt des Lotes von A auf BC und D liege zwischen B und C. Sei E der Fußpunkt des Lotes von D auf AC. Sei F der Fußpunkt des Lotes von D auf BC, vgl. Abbildung.



(i) Zeigen Sie, dass $\sphericalangle M_2M_1C = \sphericalangle BAC$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $CEDF$ ein Sehnenviereck ist.

(iii) Es liege E wie im Bild zwischen A und M_1 und F zwischen B und M_2. Zeigen Sie, dass dann M_1M_2FE auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 3 (5=2+3). Lösen Sie mittels **analytischer Geometrie**:

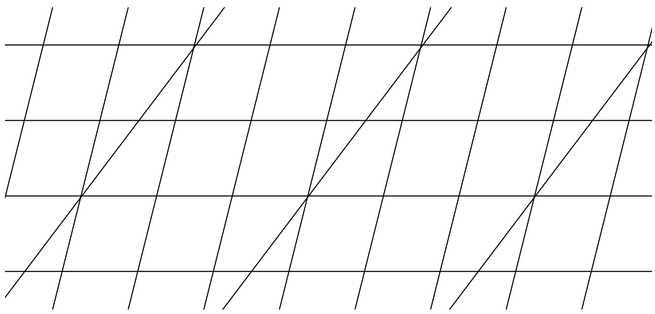
(i) Beweisen Sie: In einem Rhombus/Raute (= Parallelogramm mit gleich langen Seiten) stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

(ii) Sei ABC ein Dreieck. Die Winkelhalbierende des Dreiecks bei A schneide die Seite BC in E. Sei $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$. Zeigen Sie

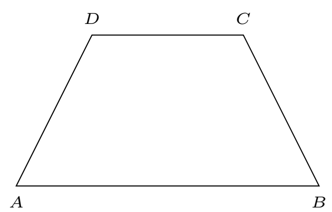
$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{c}{b}$$

Aufgabe 4 (5=3+2). **Symmetrien**

(i) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Symmetriegruppe der folgenden Figur (das Muster sei in alle Richtungen periodisch fortgesetzt)

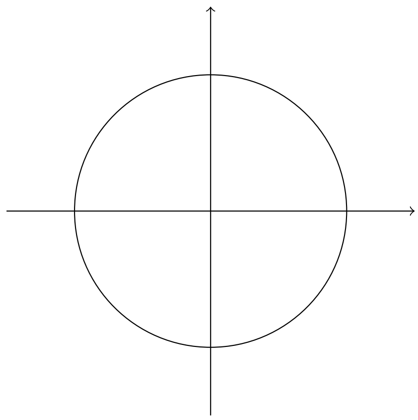


(ii) Sei $ABCD$ ein Trapez, so dass $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel sind und $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gleich lang, aber nicht parallel sind, vgl. Abbildung. Benutzen Sie eine Verschiebung um $\overrightarrow{DC}$, um zu zeigen, dass die Innenwinkel des Trapezes bei A und B gleich groß sind.



Aufgabe 5 (8=2+2+4)**. Hyperbolische Geometrie**
Wir betrachten das Poincaresche Modell $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ der hyperbolischen Ebene. Sei $v = \mathrm{i}$.

(i) Sei $u \in \{\pm 1, e^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, e^{\pm \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}, -\mathrm{i}\}$. Zeichnen Sie für alle diese 7 u die Gerade ein, die u und v als Randpunkte hat.

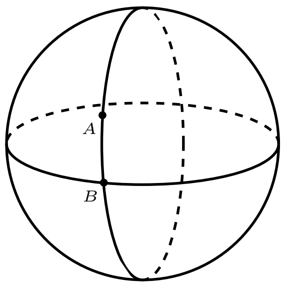


(ii) Zeigen Sie, dass alle Geraden, für die ein Randpunkt v ist, die Form $g_r = k_r \cap \mathbb{D}$ für ein $r \in \mathbb{R}$ haben, wobei $k_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - r)^2 + (y - 1)^2 = r^2\}$ für $r \neq 0$ und $k_0 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ist.

(iii) Bestimmen Sie, welche Geraden g_r die Gerade $h = \{(x, 0) \mid x \in (-1, 1)\}$ schneiden und bestimmen Sie für diese den Schnittpunkt P_r und den Tanges des Schnittwinkels der Geraden g_r und h. Berechnen Sie außerdem $d_{\mathbb{H}}(0, P_r)$.

Aufgabe 6 (5=1+1+3)**. Sphärische Geometrie**
Seien $A, B \in S^2$, $A \neq B$, und sei $C = \frac{A \times B}{|A \times B|} \in S^2$.

(i) Zeichnen Sie ins Bild für das dort gegebene A und B das zugehörige C ein.



(ii) Zeigen Sie, dass ABC genau dann ein sphärisches Dreieck ist, wenn $A \neq \pm B$ ist.

(iii) Sei $A \neq \pm B$. Zeigen Sie, dass ABC gleichschenklig (also zwei gleichlange Seiten besitzt) ist. Bestimmen Sie die Seitenlänge AC und die Innenwinkel des Dreiecks.

Aufgabe 7 (5=1+4)**. Axiomatik**

(i) Geben Sie die Definition an, wann zwei Punkte auf der gleichen Seite einer Gerade liegen.

(ii) Sei A, B, C, D vier Punkte einer angeordneten Inzidenzgeometrie gegeben. Es liegen

(a) B und C auf derselben Seite von g_{AD}

(b) D und C auf derselben Seite von g_{AB}

(c) A und C auf verschiedenen Seiten von g_{BD}

Zeigen Sie, dass es dann einen Punkt $F \in \overline{AC} \cap g_{BD}$ gibt, der insbesondere auch in $\overline{BD}$ liegt.

Aufgabe 8 (7= 2+(1+1+3))**. Axiomatik**
Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen gegeben.

(i) Geben Sie die Definition für Winkel in einer angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen an und wann zwei solcher Winkel kongruent sind.

(ii) Wir führen folgende Relation auf der Menge der Winkel ein:

Es gelte $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(L_1, L_2)$ genau dann, falls es eine Kongruenzabbildung k mit $k(\sphericalangle(H_1, H_2)) \subseteq \sphericalangle(L_1, L_2)$ und $k(H_1 \cap H_2) = L_1 \cap L_2$ gibt.

Zeigen Sie, dass für alle Winkel $\sphericalangle(H_1, H_2)$ und $\sphericalangle(R_1, R_2)$ gilt:

(a) $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$

(b) Aus $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(R_1, R_2)$ und $\sphericalangle(R_1, R_2) \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$, folgt $\sphericalangle(H_1, H_2) = \sphericalangle(R_1, R_2)$.

(c) Es gilt $\sphericalangle(H_1, H_2) \leq \sphericalangle(R_1, R_2)$ oder $\sphericalangle(R_1, R_2) \leq \sphericalangle(H_1, H_2)$ (d.h. je zwei Winkel sind vergleichbar).

Aufgabe 9 (3)**.** Sei ABC ein euklidisches Dreieck. Sei k_1 ein Kreis, der g_{BC} in B berührt und durch A geht. Sein Radius sei p. Sei k_2 ein Kreis der g_{BC} in C berührt und durch A geht. Sein Radius sei q. Sei R der Radius des Umkreises. Zeigen Sie

$$pq = R^2.$$