Axiomatik der sphärischen Geometrie

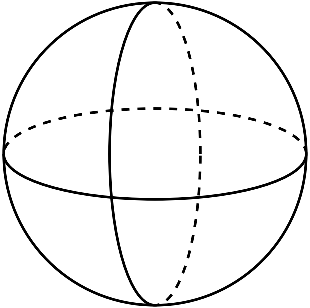
zur Vorlesung Elementargeometrie SS16

Axiome der Euklidischen Geometrie

- Inzidenzaxiome: (I1)–(I3)
- Anordnungsaxiome: (A1)–(A5)
- Kongruenzaxiome für Winkel und Strecken: (K1)–(K6)
- Parallelenaxiom: (P)
- Vollständigkeitsaxiome: (V1)–(V2)

Sphärische Geometrie

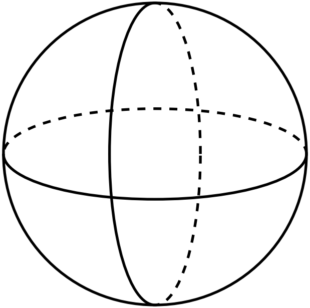
Schon keine Inzidenzgeometrie –
(I1) gilt nicht.



Sphärische Geometrie

Schon keine Inzidenzgeometrie –
(I1) gilt nicht.

Was nun?

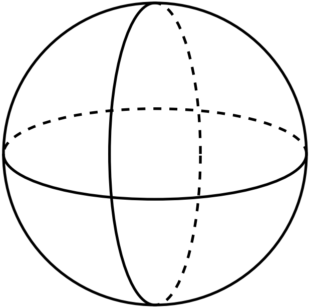


Sphärische Geometrie

Schon keine Inzidenzgeometrie –
(I1) gilt nicht.

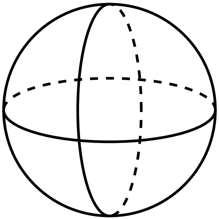
Was nun?

Axiome ersetzen - Wir raten mal...



Neue Inzidenzaxiome - eine Möglichkeit

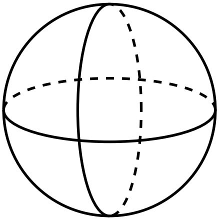
alt (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.



Neue Inzidenzaxiome - eine Möglichkeit

alt (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

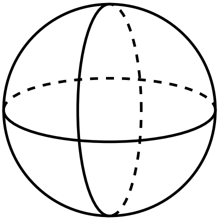
- Nicht wahr für antipodale (gegenüberliegende) Punkte, wie Nord-/Südpol.



Neue Inzidenzaxiome - eine Möglichkeit

alt (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

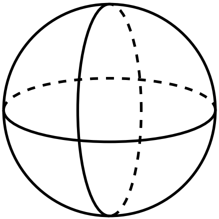
- Nicht wahr für antipodale (gegenüberliegende) Punkte, wie Nord-/Südpol.
- Idee: Diese Punkte aus (I1) rausnehmen.



Neue Inzidenzaxiome - eine Möglichkeit

alt (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

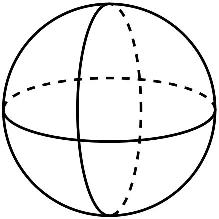
- Nicht wahr für antipodale (gegenüberliegende) Punkte, wie Nord-/Südpol.
- Idee: Diese Punkte aus (I1) rausnehmen.
- Doch wie definiert man antipodal axiomatisch?



Neue Inzidenzaxiome - eine Möglichkeit

alt (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

- Nicht wahr für antipodale (gegenüberliegende) Punkte, wie Nord-/Südpol.
- Idee: Diese Punkte aus (I1) rausnehmen.
- Doch wie definiert man antipodal axiomatisch?

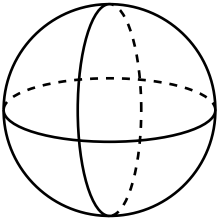


(I1'a) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau zwei Punkten. Diese heißen antipodal.

Neue Inzidenzaxiome - eine Möglichkeit

alt (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

- Nicht wahr für antipodale (gegenüberliegende) Punkte, wie Nord-/Südpol.
- Idee: Diese Punkte aus (I1) rausnehmen.
- Doch wie definiert man antipodal axiomatisch?



(I1'a) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau zwei Punkten. Diese heißen antipodal.

(I1'b) Durch je zwei verschiedene Punkte, die nicht antipodal sind, geht genau eine Gerade.

Neue Inzidenzaxiome

(I1'a) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau zwei Punkten. Diese heißen antipodal.

(I1'b) Durch je zwei verschiedene Punkte , die nicht antipodal sind, geht genau eine Gerade.

Neue Inzidenzaxiome

(I1'a) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau zwei Punkten. Diese heißen antipodal.

(I1'b) Durch je zwei verschiedene Punkte , die nicht antipodal sind, geht genau eine Gerade.

(I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

Neue Inzidenzaxiome

(I1'a) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau zwei Punkten. Diese heißen antipodal.

(I1'b) Durch je zwei verschiedene Punkte , die nicht antipodal sind, geht genau eine Gerade.

(I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

(I3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

Anordnungsaxiome?

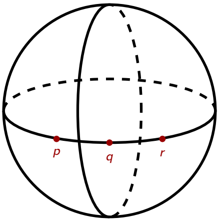
(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p.

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt.

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

(A5) Seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte und g eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls g die Strecke $\overline{pq}$ schneidet (d.h. es gibt einen Punkt s auf g und zwischen p und q), dann schneidet g auch genau eine der beiden Strecken $\overline{pr}$, $\overline{qr}$.



Anordnungsaxiome?

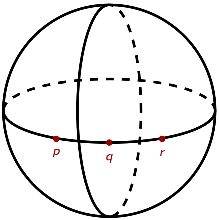
(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p.

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt.

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

(A5) Seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte und g eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls g die Strecke $\overline{pq}$ schneidet (d.h. es gibt einen Punkt s auf g und zwischen p und q), dann schneidet g auch genau eine der beiden Strecken $\overline{pr}$, $\overline{qr}$.



Anordnungsaxiome?

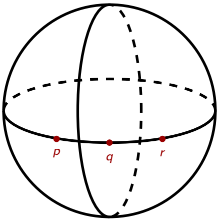
(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p. ☺

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt.

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

(A5) Seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte und g eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls g die Strecke $\overline{pq}$ schneidet (d.h. es gibt einen Punkt s auf g und zwischen p und q), dann schneidet g auch genau eine der beiden Strecken $\overline{pr}$, $\overline{qr}$.



Anordnungsaxiome?

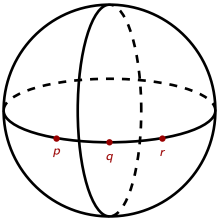
(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p. ☺

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt. ☺

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

(A5) Seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte und g eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls g die Strecke $\overline{pq}$ schneidet (d.h. es gibt einen Punkt s auf g und zwischen p und q), dann schneidet g auch genau eine der beiden Strecken $\overline{pr}$, $\overline{qr}$.



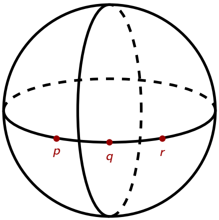
Anordnungsaxiome?

(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p. ☺

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt. ☺

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen. ☹



Anordnungsaxiome?

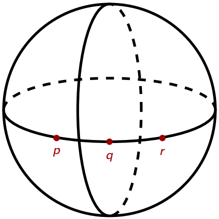
(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p. ☺

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt. ☺

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen. ☹

- Die Situation auf der Sphäre ist zyklisch:



Anordnungsaxiome?

(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

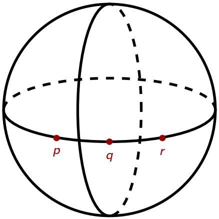
(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p. ☺

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt. ☺

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen. ☹

- Die Situation auf der Sphäre ist zyklisch:

(A4') Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt p auch zwischen r und q und r zwischen p und q.



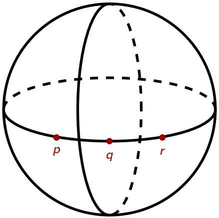
Anordnungsaxiome?

(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p. ☺

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt. ☺

(A4') Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt p auch zwischen r und q und r zwischen p und q.



Anordnungsaxiome?

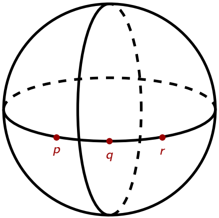
(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p. ☺

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt. ☺

(A4') Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt p auch zwischen r und q und r zwischen p und q.

(A5) Seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte und g eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls g die Strecke $\overline{pq}$ schneidet (d.h. es gibt einen Punkt s auf g und zwischen p und q), dann schneidet g auch genau eine der beiden Strecken $\overline{pr}$, $\overline{qr}$.



Anordnungsaxiome?

(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. ☺

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p. ☺

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt. ☺

(A4') Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt p auch zwischen r und q und r zwischen p und q.

(A5) Seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte und g eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls g die Strecke $\overline{pq}$ schneidet (d.h. es gibt einen Punkt s auf g und zwischen p und q), dann schneidet g auch genau eine der beiden Strecken $\overline{pr}$, $\overline{qr}$. ☺ [a]

---

[a] (A1), (A2), (A4) kann man zusammenfassen und alles kürzer/schöner machen...

Kongruenzaxiome?

(K1) *Abtragung von Strecken:* Seien p, q, r, s Punkte mit $r \neq s$, dann gibt es genau einen Punkt $t \in S(r,s)$, so dass $\overline{pq} \cong_S \overline{rt}$.

(K2) $\cong_S$ ist eine Äquivalenzrelation.

(K3) *Addition von Strecken:* Sei q zwischen p und r, sowie b zwischen a und c. Falls $\overline{pq} \cong \overline{ab}$ und $\overline{qr} \cong \overline{bc}$ gilt, dann gilt auch $\overline{pr} \cong \overline{ac}$.

(K4) Die Kongruenz von Winkeln $\cong_W$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel.

(K5) *Abtragung von Winkeln:* Sei $\sphericalangle pqr$ ein Winkel und p', q', u drei nicht kollineare Punkte. Dann gibt es genau einen Winkel $\sphericalangle p'q'r'$ kongruent zu $\sphericalangle pqr$, so dass r' und u auf der gleichen Seite der Gerade durch p' und q' liegen.

(K6) Seien (p,q,r) und (p',q',r') Tripel von Punkten, die jeweils nicht kollinear sind. Dann gilt mit

$$\overline{pq} \cong_S \overline{p'q'}, \quad \overline{pr} \cong_S \overline{p'r'}, \quad \text{und} \quad \sphericalangle qpr \cong_W \sphericalangle q'p'r'$$

auch $\sphericalangle pqr \cong_W \sphericalangle p'q'r'$.

Kongruenzaxiome?

(K1) *Abtragung von Strecken:* Seien p, q, r, s Punkte mit $r \neq s$, dann gibt es genau einen Punkt $t \in S(r,s)$, so dass $\overline{pq} \cong_S \overline{rt}$.

(K2) $\cong_S$ ist eine Äquivalenzrelation.

(K3) *Addition von Strecken:* Sei q zwischen p und r, sowie b zwischen a und c. Falls $\overline{pq} \cong \overline{ab}$ und $\overline{qr} \cong \overline{bc}$ gilt, dann gilt auch $\overline{pr} \cong \overline{ac}$.

(K4) Die Kongruenz von Winkeln $\cong_W$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel.

(K5) *Abtragung von Winkeln:* Sei $\sphericalangle pqr$ ein Winkel und p', q', u drei nicht kollineare Punkte. Dann gibt es genau einen Winkel $\sphericalangle p'q'r'$ kongruent zu $\sphericalangle pqr$, so dass r' und u auf der gleichen Seite der Gerade durch p' und q' liegen.

(K6) Seien (p,q,r) und (p',q',r') Tripel von Punkten, die jeweils nicht kollinear sind. Dann gilt mit

$$\overline{pq} \cong_S \overline{p'q'}, \quad \overline{pr} \cong_S \overline{p'r'}, \quad \text{und} \quad \sphericalangle qpr \cong_W \sphericalangle q'p'r'$$

auch $\sphericalangle pqr \cong_W \sphericalangle p'q'r'$. ☹ [1]

[1] modulo Fragen, was hier genau $S(r,s)$ sein soll...

Parallelenaxiom?

Parallelenaxiom?

keine Parallelen

Vollständigkeitsaxiome?

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden g, so dass p nicht zwischen q und r liegt. Dann gibt es Punkte $q = q_1$, q_2,... auf g mit $\overline{q_i q_{i+1}} \cong_S \overline{pq}$. Außerdem liegt q_i zwischen p und q_{i+1}. Nach endlich vielen Schritten liegt r zwischen p und q_k.

Vollständigkeitsaxiome?

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden g, so dass p nicht zwischen q und r liegt. Dann gibt es Punkte $q = q_1$, q_2,... auf g mit $\overline{q_i q_{i+1}} \cong_S \overline{pq}$. Außerdem liegt q_i zwischen p und q_{i+1}. Nach endlich vielen Schritten liegt r zwischen p und q_k. ☺

Vollständigkeitsaxiome?

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden g, so dass p nicht zwischen q und r liegt. Dann gibt es Punkte $q = q_1$, q_2,... auf g mit $\overline{q_i q_{i+1}} \cong_S \overline{pq}$. Außerdem liegt q_i zwischen p und q_{i+1}. Nach endlich vielen Schritten liegt r zwischen p und q_k. ☺

- (V1) ist aber hier gar nicht nötig, warum?

Vollständigkeitsaxiome?

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden g, so dass p nicht zwischen q und r liegt. Dann gibt es Punkte $q = q_1$, q_2,... auf g mit $\overline{q_i q_{i+1}} \cong_S \overline{pq}$. Außerdem liegt q_i zwischen p und q_{i+1}. Nach endlich vielen Schritten liegt r zwischen p und q_k. ☺

- (V1) ist aber hier gar nicht nötig, warum?
- (V1) ist dazu da, dass 'auf einer Geraden nicht zu viele Punkte liegen'.

Vollständigkeitsaxiome?

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden g, so dass p nicht zwischen q und r liegt. Dann gibt es Punkte $q = q_1$, q_2,... auf g mit $\overline{q_i q_{i+1}} \cong_S \overline{pq}$. Außerdem liegt q_i zwischen p und q_{i+1}. Nach endlich vielen Schritten liegt r zwischen p und q_k. ☺

- (V1) ist aber hier gar nicht nötig, warum?
- (V1) ist dazu da, dass 'auf einer Geraden nicht zu viele Punkte liegen'. In der sphärischen Geometrie erledigt das schon die zyklische Ordnung.

Vollständigkeitsaxiome?

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden g, so dass p nicht zwischen q und r liegt. Dann gibt es Punkte $q = q_1$, q_2,... auf g mit $\overline{q_i q_{i+1}} \cong_S \overline{pq}$. Außerdem liegt q_i zwischen p und q_{i+1}. Nach endlich vielen Schritten liegt r zwischen p und q_k. ☺

- (V1) ist aber hier gar nicht nötig, warum?
- (V1) ist dazu da, dass 'auf einer Geraden nicht zu viele Punkte liegen'. In der sphärischen Geometrie erledigt das schon die zyklische Ordnung.

(V2) *Maximalität:* Das vorläufiges Modell der euklidischen Ebene ist maximal.

Vollständigkeitsaxiome?

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden g, so dass p nicht zwischen q und r liegt. Dann gibt es Punkte $q = q_1$, q_2,... auf g mit $\overline{q_i q_{i+1}} \cong_S \overline{pq}$. Außerdem liegt q_i zwischen p und q_{i+1}. Nach endlich vielen Schritten liegt r zwischen p und q_k. ☺

- (V1) ist aber hier gar nicht nötig, warum?
- (V1) ist dazu da, dass 'auf einer Geraden nicht zu viele Punkte liegen'. In der sphärischen Geometrie erledigt das schon die zyklische Ordnung.

(V2) *Maximalität:* Das vorläufiges Modell der euklidischen Ebene ist maximal. ☺

Axiomatik der sphärischen Geometrie

- Inzidenzaxiome: neues (I1) (Stichwort: antipodal)

Axiomatik der sphärischen Geometrie

- Inzidenzaxiome: neues (I1) (Stichwort: antipodal)
- Anordnungsaxiome: neues (A4) (Stichwort: zyklische Ordnung)

Axiomatik der sphärischen Geometrie

- Inzidenzaxiome: neues (I1) (Stichwort: antipodal)
- Anordnungsaxiome: neues (A4) (Stichwort: zyklische Ordnung)
- Kongruenzaxiome

Axiomatik der sphärischen Geometrie

- Inzidenzaxiome: neues (I1) (Stichwort: antipodal)
- Anordnungsaxiome: neues (A4) (Stichwort: zyklische Ordnung)
- Kongruenzaxiome
- ~~Parallelenaxiom~~

Axiomatik der sphärischen Geometrie

- Inzidenzaxiome: neues (I1) (Stichwort: antipodal)
- Anordnungsaxiome: neues (A4) (Stichwort: zyklische Ordnung)
- Kongruenzaxiome
- ~~Parallelenaxiom~~
- Vollständigkeitsaxiome: (V2) ((V1) ist wahr, aber automatisch erfüllt)

Axiomatik der sphärischen Geometrie

- Inzidenzaxiome: neues (I1) (Stichwort: antipodal)
- Anordnungsaxiome: neues (A4) (Stichwort: zyklische Ordnung)
- Kongruenzaxiome
- ~~Parallelenaxiom~~
- Vollständigkeitsaxiome: (V2) ((V1) ist wahr, aber automatisch erfüllt)

Man hat jetzt einen vernünftigen Kandidaten für ein Axiomensystem der sphärischen Geometrie.

Axiomatik der sphärischen Geometrie

- Inzidenzaxiome: neues (I1) (Stichwort: antipodal)
- Anordnungsaxiome: neues (A4) (Stichwort: zyklische Ordnung)
- Kongruenzaxiome
- ~~Parallelenaxiom~~
- Vollständigkeitsaxiome: (V2) ((V1) ist wahr, aber automatisch erfüllt)

Man hat jetzt einen vernünftigen Kandidaten für ein Axiomensystem der sphärischen Geometrie. Es bleibt zu zeigen, dass die Sphäre bis auf Isomorphie eindeutig durch die obigen Axiome bestimmt ist...