Elementargeometrie
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/

Nadine Große, Yi-Sheng Wang
SS 16

Übungsblatt 7

Aufgabe 13. (2+2+1) Wir befinden uns im Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene.

(i) Liegen p, q, r auf einer Geraden und q zwischen p und r. Zeigen Sie, dass dann $d_{\mathbb{H}}(p, q) + d_{\mathbb{H}}(q, r) = d_{\mathbb{H}}(p, r)$ gilt.

(ii) (Geraden sind unendlich lang) Seien $g_b = \{c(t) = b + t\mathrm{i} \mid t \in (t_+ = 0, t_- = \infty)\}$ und $h_{x_0,r} = \{c(t) = r\cos t + x_0 + \mathrm{i}r\sin t \mid t \in (t_+ = 0, t_- = \pi)\}\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass für beide Geraden und $t, s \in (t_+, t_-)$

$$\lim_{t \to t_\pm} d_{\mathbb{H}}(c(t), c(s)) = \infty$$

gilt.

(iii) Berechnen Sie $d_{\mathbb{H}}(\mathrm{i}, a\mathrm{i})$, $d_{\mathbb{H}}(a\mathrm{i}, 2a\mathrm{i})$ und $d_{\mathbb{H}}(a\mathrm{i}, a^2\mathrm{i})$ für $a > 0$.

Aufgabe 14. (1+2+2) Sei $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine bijektive Abbildung, die das Minkowskiprodukt erhält, d.h.

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle_M = \langle x, y \rangle_M \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie:

(i) Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ ebenfalls eine Lorentz-orthonomale Basis.

(ii) ϕ ist linear. (Hinweis: Am besten in der Basis e_1, e_2, e_3 arbeiten.)

(iii) Es gibt eine reelle 3×3-Matrix A mit $A^T J A = J$ und $\phi(x) = Ax$.

Abgabe am Donnerstag 16.06.16 bis 16 Uhr in die Briefkästen