Nadine Große, Yi-Sheng Wang
SS 16

Übungsblatt 8

Aufgabe 15. (1+2+1+2)

(i) Seien $x \in \mathbb{R}^3$ zeit- oder raumartig und $y \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ und ein $z \in \mathbb{R}^3$ mit $y = ax + z$ und $\langle z, x\rangle_M = 0$ gibt.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}^3$ zeitartig und $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\langle z, x\rangle_M = 0$. Zeigen Sie, dass z dann raumartig ist.

(Hinweis: Verwenden Sie Koordinaten (x_0, x_1, x_2), (z_0, z_1, z_2) und die normale Cauchy-Schwarz-Ungleichung für die letzten beiden Komponenten).

(iii) (Inverse Cauchy-Ungleichung) Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ zeitartig oder lichtartig. Zeigen Sie mit Hilfe von (i) und (ii), dass $\langle x, y\rangle_M^2 \geq \langle x, x\rangle_M \langle y, y\rangle_M$ gilt.

(iv) (Inverse Dreiecks-Ungleichung)[1] Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ zeitartig oder lichtartig. Wir setzen $|x| := \sqrt{|\langle x, x\rangle_M|}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (iii), dass $|x + y| \geq |x| + |y|$ gilt.

Aufgabe 16. (1+2+2) Sei $g_0 = \{\mathrm{i}y \mid y > 0\} \subset \mathbb{H}$.

(i) Zeigen Sie, dass für $a > 0$ die Abbildung $s_a \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto az$ eine Isometrie ist für die $s_a(g_0) = g_0$ gilt.

(ii) Sei $t_b \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die Translation in x-Richung um $b \in \mathbb{R}$. Sei $r_\alpha \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die Rotation um den Ursprung um den Winkel α. Sei $f \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $p \mapsto \frac{p-\mathrm{i}}{p+\mathrm{i}}$.

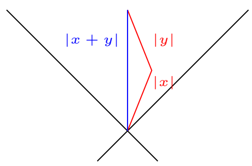
Skizzieren Sie für $i = 0, 1, 2$ die Geraden $t_i(g_0)$ in $\mathbb{H}$, $f \circ t_i(g_0)$, $r_{\frac{\pi}{3}} \circ f \circ t_i(g_0)$ in $\mathbb{D}$.

(iii) Seien $p \neq q$ zwei Punkte in $\mathbb{D}$. Sei ℓ die Gerade durch p und q. Benutzen Sie die Isometrien r_α, t_b und s_a um zu beschreiben, wie man eine Isometrie von $\mathbb{D}$ erhält, die ℓ auf $(-1, 1) \subset \mathbb{D}$ und p auf den Ursprung abbildet.

Abgabe am Donnerstag 23.06.16 bis 16 Uhr in die Briefkästen

---

[1]



Die 0-te Koordinate des Minkowskiraumes wird als Zeitrichtung interpretiert, die anderen Koordinaten sind die Raumrichtungen (Das Leben ist zwar 3D. Aber zur Einfachheit gibt es hier nur 2 Raumrichtungen.) Bewegen wir uns durch Raum und Zeit, dann beschreiben wir eine Kurve im Minkowskiraum: $s \mapsto x(s) = (x_0(s), x_1(s), x_2(s))$. Für jedes s haben wir eine Tangente $x'(s)$. Das Licht bewegt sich auf Kurven, deren Tangente immer lichtartig ist. Da wir uns nicht schneller als das Licht bewegen können, ist für uns $x'(s)$ immer zeitartig. Bewegt sich Person A auf der roten Kurve wie im Bild, dann entspricht $|x| + |y|$ der Zeit, die für Person A vergeht, die sogenannte Eigenzeit. Person B bewege sich nicht räumlich (blaue Kurve im Bild). Dann ist $|x + y|$ die für A vergange Zeit. Die inverse Dreiecksungleichung sagt jetzt, dass für A der sich auch räumlich bewegt hat, weniger Zeit vergangen ist, als für B – das Zwillingsparadoxon.