Nadine Große, Yi-Sheng Wang
SS 16

Übungsblatt 10

Aufgabe 19. (1+4) Es sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie gegeben und drei nichtkollineare Punkte p, q, r. Wir sagen, dass ein Punkt s im *Inneren* des Winkels $\sphericalangle pqr$ liegt, falls sowohl p und s auf derselben Seite der Geraden durch q und r liegt als auch s und r auf derselben Seite der Geraden durch q und p liegt.

(i) Geben Sie die Definition des Strahls $S(q, s)$ zweier Punkte q und s, $q \neq s$, ausgehend von q an.

(ii) Sei s ein Punkt im Inneren von $\sphericalangle pqr$. Zeigen Sie, dass dann $u \in S(q, s) \setminus \{q\}$ im Inneren von $\sphericalangle pqr$ liegt. (Hinweis: Betrachten Sie das Dreieck usr.)

Aufgabe 20. (4+1) Gegeben sei der Kegelschnitt

$$0 = 5x^2 - y^2 + 6\sqrt{3}xy.$$

(i) Bestimmen Sie die Normalform des Kegelschnittes. Die neuen Koordinaten sollen $(\tilde{x}, \tilde{y})$ heißen.

(ii) Skizzieren Sie die Lösungsmenge und das neue Koordinatensystem $(\tilde{x}, \tilde{y})$ im alten Koordinatensystem (x, y).

Aufgabe 21. (1+2+2) Seien A, B, C drei nichtkollineare Punkte in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

(i) Geben Sie die Definition des Abstandsfunktion $d(A, B)$ an.

(ii) Sei $\gamma := \sphericalangle ACB$ ein rechter Winkel. Berechnen Sie $\|\overline{CM}\|$ in Termen von $\|\overline{AM}\|$ (ohne Verwendung des Thalessatzes).

(iii) Sei nun $\overline{CM} \cong_S \overline{AM}$. Zeigen Sie, dass $\sphericalangle ACB$ ein rechter Winkel ist (ohne Verwendung des Thalessatzes). (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass gleichschenklige Dreieck zwei gleiche Winkel besitzen.)

Aufgabe 22. (1+3+1)
Sei $\mathbb{H}$ das hyperbolische Halbebenenmodell. Seien p, q, r drei nichtkollineare Punkte in $\mathbb{H}$. Sei g die Gerade durch q, die den Winkel $\sphericalangle pqr$ halbiert, d.h. für einen Punkt s auf g gelte, $\sphericalangle pqs \cong \sphericalangle qsr$. Der Abstand eines Punktes s zu einer Geraden ℓ sei der Abstand von s zum eindeutigen Punkt s' auf ℓ, für den die Gerade durch s und s' die Gerade ℓ im rechten Winkel schneidet.

(i) Geben Sie an, was die Geraden in $\mathbb{H}$ sind.

(ii) Zeigen Sie, dass ein Punkt s genau dann auf g liegt, wenn er zur Geraden durch p und q den gleichen Abstand hat wie zur Geraden durch q und r. (Hinweis: Benutzen Sie die Kongruenzsätze.)

(iii) Bestimmen Sie einen Punkt, der von allen drei Dreieckseiten den gleichen Abstand hat. Ist dieser Punkt eindeutig bestimmt?

Kein reguläre Abgabe. Sie können dieses Blatt nutzen um Bonuspunkte zu erhalten, falls nötig. Fragen Sie Ihren Tutor. In diesem Fall ist Abgabe am Donnerstag 07.07.16 bis 16 Uhr in die Briefkästen.

Axiomatik der euklidischen Ebene

(I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

(I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

(I3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

(A1) Falls q zwischen p und r liegt, dann sind p, q, r paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.

(A2) Falls q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p.

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt.

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

(A5) Seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte und g eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls g die Strecke $\overline{pq}$ schneidet (d.h. es gibt einen Punkt s auf g und zwischen p und q), dann schneidet g auch genau eine der beiden Strecken $\overline{pr}$, $\overline{qr}$.

(K1) *Abtragung von Strecken:* Seien p, q, r, s Punkte mit $r \neq s$, dann gibt es genau einen Punkt $t \in S(r, s)$, so dass $\overline{pq} \cong_S \overline{rt}$.

(K2) $\cong_S$ ist eine Äquivalenzrelation.

(K3) *Addition von Strecken:* Sei q zwischen p und r, sowie b zwischen a und c. Falls $\overline{pq} \cong_S \overline{ab}$ und $\overline{qr} \cong_S \overline{bc}$ gilt, dann gilt auch $\overline{pr} \cong_S \overline{ac}$.

(K4) Die Kongruenz von Winkeln $\cong_W$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel.

(K5) *Abtragung von Winkeln:* Sei $\sphericalangle pqr$ ein Winkel und p', q', u drei nicht kollineare Punkte. Dann gibt es genau einen Winkel $\sphericalangle p'q'r'$ kongruent zu $\sphericalangle pqr$, so dass r' und u auf der gleichen Seite der Gerade durch p' und q' liegen.

(K6) Seien (p, q, r) und (p', q', r') Tripel von Punkten, die jeweils nicht kollinear sind. Dann gilt mit

$$\overline{pq} \cong_S \overline{p'q'}, \quad \overline{pr} \cong_S \overline{p'r'}, \quad \text{und} \quad \sphericalangle qpr \cong_W \sphericalangle q'p'r'$$

auch $\sphericalangle pqr \cong_W \sphericalangle p'q'r'$.

(P) *Parallelenaxiom:* Für jede Gerade g und jeden Punkt p, der nicht auf g liegt, gibt es höchstens eine Gerade h durch p, die mit g keinen gemeinsamen Punkt hat.

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden g, so dass p nicht zwischen q und r liegt. Dann gibt es Punkte $q = q_1$, q_2,... auf g mit $\overline{q_i q_{i+1}} \cong_S \overline{pq}$. Außerdem liegt q_i zwischen p und q_{i+1}. Nach endlich vielen Schritten liegt r zwischen p und q_k.

(V2) *Maximalität:* Das vorläufiges Modell der euklidischen Ebene ist maximal.