

21.02.2023, Bearbeitungszeit: 3h

**Aufgabe 1** (5=1.5+2+1.5).

- (i) Berechnen Sie die Länge der Kurve  $\gamma: t \in [0, 2\pi] \mapsto (3 \sin(3t), 3 \cos(3t))^T \in \mathbb{R}^2$ .
- (ii) Berechnen Sie  $\int_{\gamma} V \cdot ds$  für  $V(x, y) = (-xy, x^2)^T$ , wobei  $\gamma$  den Rand von  $B_R(0)$  im mathematisch positiven Drehsinne durchläuft.
- (iii) Definieren Sie die Divergenz und die Rotation im  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 2** (5=2+3). (i) Sei  $f: Q = [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ . Definieren Sie die  $k$ .te Obersumme  $S^k(f)$  von  $f$ .

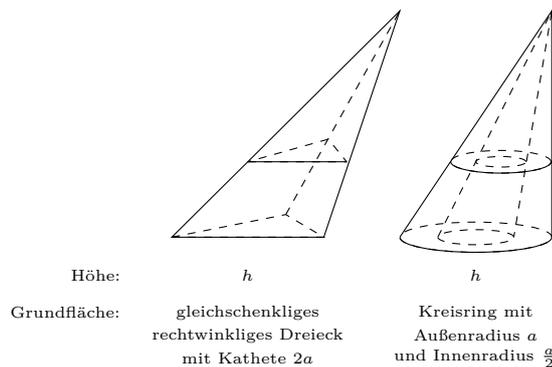
- (ii) Sei  $\Omega = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\} \subset Q = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Integrals, dass die charakteristische Funktion  $1|_{\Omega}: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist.

**Aufgabe 3** (5=1.5+1.5+2). Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \sin y$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  Jordan-messbar. Die Verwendung von Fubini ergebe

$$\int_{\Omega} f \, d\text{vol} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2x}^{\pi} f(x, y) \, dy \, dx.$$

- (i) Berechnen Sie das Integral.
- (ii) Skizzieren Sie  $\Omega$ .
- (iii) Verwenden Sie Fubini für  $\int_{\Omega} f \, d\text{vol}$  aber so, dass ein Integral der Form  $\int_?^? \int_?^? f(x, y) \, dx \, dy$  entsteht.

**Aufgabe 4** (3). Vergleichen Sie die Volumina dieser zwei Körper miteinander. Begründen Sie.

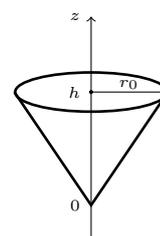


**Aufgabe 5** (9=4.5+4.5).

- (i)

Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels im Bild bei Rotation um die  $z$ -Achse.

Hinweis: Z.B. mit Zylinderkoordinaten.



- (ii) Die Funktion  $\phi: (x, y) \in A := (0, 1)^2 \mapsto (x, yx^2) \in \phi(A) \subset \mathbb{R}^2$  ist ein Diffeomorphismus (muss nicht überprüft werden). Skizzieren Sie  $\phi(A)$ . Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für  $\phi$  den Flächeninhalt von  $\phi(A)$ .

**Aufgabe 6** (10=1+2+1.5+4.5+1). Sei  $M$  die Menge aller Punkte  $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$  mit  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Sei  $V(x, y, z) = (x, y, z)^T$ . Sei

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, z \in [-1, 1]\}$$

$$\Omega = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \in (-1, 1)\}.$$

- (i) Skizzieren Sie  $K$ .
- (ii) Berechnen Sie  $\int_K \operatorname{div} V \, \operatorname{dvol}$ .
- (iii) Rechnen Sie mit dem Kriterium vom regulären Wert nach, dass  $M$  eine Untermannigfaltigkeit ist.
- (iv) Die Abbildung

$$F: U := (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\phi, v) \mapsto (\cosh v \cos \phi, \cosh v \sin \phi, \sinh v)^T$$

ist ein Diffeomorphismus aufs Bild  $F(U) \subset M$  (muss nicht gezeigt werden). Geben Sie  $M \setminus F(U)$  an. Zeigen Sie, dass  $F$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  ist. Berechnen Sie das Oberflächenintegral  $\int_\Omega \langle V, N \rangle \operatorname{dvol}$ .

- (v) Welchem Integral/welchen Integralen (muss nur hingeschrieben und nicht ausgerechnet werden) entspricht nach dem Divergenzsatz der Term  $\int_K \operatorname{div} V \, \operatorname{dvol} - \int_\Omega \langle V, N \rangle \operatorname{dvol}$ ?

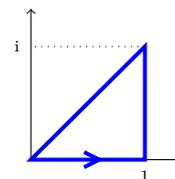
**Aufgabe 7** (5=2+1+1+1). (i) Definieren Sie 'komplex differenzierbar' und geben Sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für eine Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  an.

- (ii) Was ist der Zusammenhang zwischen komplex differenzierbar und den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen?
- (iii) Rechnen Sie explizit mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit nach, dass  $f: z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar ist.
- (iv) Rechnen Sie für die Funktion aus (iii) explizit die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen nach.

**Aufgabe 8** (8=3.5+4.5).

(i)

Berechnen Sie  $\int_\gamma \bar{z} dz$ , wobei  $\gamma$  die Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



- (ii) Bestimmen Sie (mit Begründung)  $\int_{\partial B_1(0)} \frac{\sin z}{z-3} dz$  und  $\int_{\partial B_2(0)} \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2} dz$  und  $\int_{\partial B_3(0)} \frac{\cos z}{z-2} dz$ .