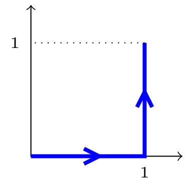
Klausur Erweiterung der Analysis WS 23/24

14.02.2024, Bearbeitungszeit: 3h

Aufgabe 1 (4=1,5+2,5)**.**

(i) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma\colon t \in [-4,4] \mapsto (3\sin(t), t, 3\cos(t))^T \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = (0, x^2y+1)^T$, wobei γ die Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



Aufgabe 2 (5=2+3)**.**

(i) Sei $f\colon Q = [0,1]^3 \to \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Definieren Sie die k.te Untersumme $S_k(f)$ von f.

(ii) Sei $f\colon (x,y,z) \in Q = [0,1]^3 \mapsto xy \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Integrals, dass die Funktion f integrierbar ist.

Aufgabe 3 (5=1+2+2)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto x$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Die Verwendung von Fubini ergebe

$$\int_\Omega f \mathrm{dvol} = \int_{r_0}^{R_0} \int_0^{\sqrt{R_0^2-y^2}} f(x,y)dxdy$$

für $0 < r_0 < R_0$.

(i) Berechnen Sie das Integral.

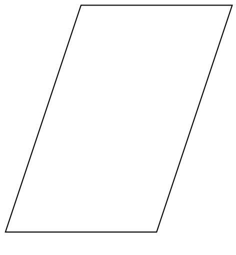
(ii) Skizzieren Sie Ω.

(iii) Verwenden Sie Fubini für $\int_\Omega f\mathrm{dvol}$ aber so, dass ein Integral der Form $\int_?^? \int_?^? f(x,y)dydx$ entsteht (Das entstandene Integral muss dann nicht berechnet werden).

Aufgabe 4 (1+2)**.**

(i) Geben Sie die Formel zur Berechnung des Schwerpunkts einer Jordan-messbaren Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ an.

(ii) Zeichnen Sie den Schwerpunkt des Parallelogramms im Bild möglichst genau ein. Begründen Sie Ihre Wahl. (Dazu müssen Sie den Schwerpunkt nicht mittels der Formel in (i) berechnen, sondern andere Argumente die Eigenschaften des Schwerpunkts bzw. der Formel aus (i) ausnutzen, führen auch zum Ziel).

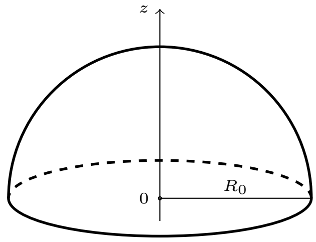


Aufgabe 5 (8=5+3)**.**

(i)

Berechnen Sie das Trägheitsmoment $J_{\text{HK}}(R_0)$ der Halbkugel (Radius R_0) im Bild bei Rotation um die z-Achse.

Hinweis: Je nachdem, wie Sie vorgehen, haben Sie eventuell ein Integral von $\cos^3\alpha$ zu berechnen. Dann z.B. $\cos^3\alpha = \cos\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha$ nutzen.

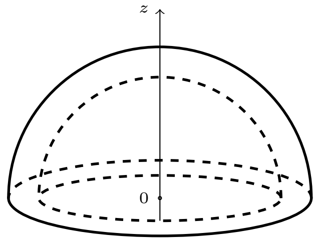


(ii)

Wir betrachten nun eine Halbkugelschale wie im Bild (Außenradius: $R_0 + \epsilon$, Innenradius: R_0.)

Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus (i) (oder alternativ $J_{\text{HK}}(R_0) = cR_0^5$ für eine reelle Konstante $c \neq 0$), um das Trägheitsmoment $J_{\text{HK-Schale}}(R_0, \epsilon)$ dieser Halbkugelschale bei Rotation um die z-Achse zu bestimmen.

Bestimmen Sie außerdem das Volumen $V_{\text{HK-Schale}}$ der Halbkugelschale und stellen Sie $J_{\text{HK-Schale}}(R_0, \epsilon)$ in der Form $J_{\text{HK-Schale}}(R_0, \epsilon) = a\, V_{\text{HK-Schale}} R_0^2 + O(\epsilon^2)$ für geeignetes $a \in \mathbb{R}$ dar.



Aufgabe 6 (10=1+1,5+3+1+2,5+1)**.** Sei M die Menge aller Punkte $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $4x^2 + y^2 = z$. Sei $\Omega_h := M \cap \{z \leq h\}$ für $h > 0$.

(i) Skizzieren Sie M und Ω_h.

(ii) Rechnen Sie mit dem Kriterium vom regulären Wert nach, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist.

(iii) Was muss in den Fragezeichen der Abbildung

$$F\colon (r, \phi) \in U := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto (?\cos\phi, r\sin\phi, r^?)^T \in \mathbb{R}^3$$

stehen, damit F eine lokale Parametrisierung von M ist? Rechnen Sie dann auch wirklich nach, dass F wirklich eine lokale Parametrisierung ist (dabei muss aber nicht gezeigt werden, dass F ein Homöomorphismus aufs Bild $F(U) \subset M$ ist). Geben Sie $M \setminus F(U)$ an und zeichnen Sie dies in Ihre Skizze von (i) ein.

(iv) Berechnen Sie für M in allen Punkten einen Einheitsnormalenvektor n.

(v) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_{\Omega_h} \langle \operatorname{rot} V, n\rangle \mathrm{dvol}$ für n aus (iv) und $V(x, y, z) = (yz, -xz, 0)^T$ (Direkt berechnen ohne Verwendung von (vi).).

(vi) Welchem Kurvenintegral entspricht $\int_{\Omega_h} \langle \operatorname{rot} V, n\rangle \mathrm{dvol}$ nach dem Rotationssatz? Geben Sie die zugehörige Kurve mit einer Parametrisierung an.

Aufgabe 7 (2)**.** Sei

$$S_R(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = R^2 \right\}$$
$$B_R(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \leq R^2 \right\}.$$

Sei A eine reelle 3×3-Matrix.
Rechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes nach:

$$\int_{S_R(0)} \langle Ax, x \rangle \mathrm{dvol}_x = \frac{4\pi}{3} R^4 \operatorname{Spur}(A).$$

Aufgabe 8 (5=2+1,5+1,5)**.** (i) Definieren Sie 'komplex differenzierbar' und geben Sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an.

(ii) Rechnen Sie explizit nach, dass $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt.

(iii) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Für welche f, ist $\bar{f}\colon z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{f(z)}$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist? Begründen Sie.

Aufgabe 9 (8)**.** Berechnen Sie bzw. bestimmen Sie mit Begründung folgende Integrale (mit den γ_i wie im Bild):

1. $\int_{\gamma_1} \frac{z^3}{(z-1)^3} dz$
2. $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$
3. $\int_{\gamma_3} \bar{z} dz$
4. $\int_{\gamma_4} \frac{e^z}{z-2} dz$