Nachklausur Erweiterung der Analysis WS 22/23

13.04.2023, Bearbeitungszeit: 3h

Aufgabe 1 (5=2+1.5+1.5)**.**

(i) Berechnen Sie für $\gamma\colon t \in [0, 2\pi] \mapsto (\sin(3t), \cos(3t))^T \in \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = xy$ das Integral $\int_\gamma f ds$.

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x, y) = (x, y)^T$, wobei γ das Geradenstück von $(0, 0)$ nach $(1, 2)$ durchläuft.

(iii) Definieren Sie den Begriff einer parametrisierten Kurve und den der Spur dieser Kurve.

Aufgabe 2 (5=2+3)**.**

(i) Definieren Sie, wann eine Funktion $f\colon Q = [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

(ii) Sei $Q = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die k-te Obersumme von $f\colon Q \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$, und deren Grenzwert für $k \to \infty$.

Aufgabe 3 (5=1.5+1.5+2)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto x$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Die Verwendung von Fubini ergebe

$$\int_\Omega f \mathrm{dvol} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} f(x, y) dy dx.$$

(i) Berechnen Sie das Integral.

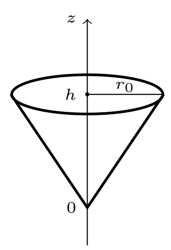
(ii) Skizzieren Sie Ω.

(iii) Verwenden Sie Fubini für $\int_\Omega f \mathrm{dvol}$ aber so, dass ein Integral der Form $\int_?^? \int_?^? f(x, y) dx dy$ entsteht.

Aufgabe 4 (9=5+4)**.**

(i)

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kegels im Bild. (Sie dürfen die Formel für das Volumen des Kegels verwenden, ohne sie herzuleiten.)



(ii) Die Funktion $\phi\colon (x, y) \in A := (0, 1) \times (1, 2) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \in \phi(A) \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Diffeomorphismus (muss nicht überprüft werden). Skizzieren Sie $\phi(A)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für ϕ den Flächeninhalt von $\phi(A)$.

Aufgabe 5 (3)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge, so dass $\partial\Omega$ durch eine glatte einfach geschlossene Kurve $\gamma\colon (0, L) \to \mathbb{R}^2$ im mathematisch positiven Drehsinne durchlaufen wird. Sei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt von Ω gleich dem Integral $\frac{1}{2}\int_0^L (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$ ist.

Hinweis: Stellen Sie sich dazu Ω als Teil der $x-y$-Ebene im $\mathbb{R}^3$ vor und benutzen Sie den Rotationssatz (=Satz von Stokes) für das Vektorfeld $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(-y, x, 0)^T$.

Aufgabe 6 (10=1+1.5+1.5+4.5+1.5)**.** Sei M die Menge aller Punkte $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $z = x^2 + y^2$. Sei $V(x, y, z) = (y, x, z)^T$. Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} K_a =& \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2, z \leq a\} \\ \Omega_a =& \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z < a\}. \end{aligned}$$

(i) Skizzieren Sie K_a.

(ii) Berechnen Sie $\int_{K_a} \operatorname{div} V \,\mathrm{dvol}$.

(iii) Rechnen Sie mit dem Kriterium vom regulären Wert nach, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist.

(iv) Füllen Sie das Fragezeichen derart aus, dass die Abbildung

$$F\colon U := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u, v, ?)^T$$

ein Diffeomorphismus aufs Bild $F(U) \subset M$ ist (Angeben reicht, es muss nicht gezeigt werden, dass es sich um einen Diffeomorphismus handelt). Geben Sie $M \setminus F(U)$ an. Zeigen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von M ist. Bestimmen Sie den äußeren Einheitsnormalenvektor N in jedem Punkt $p \in K_a$ und berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_{\Omega_a} \langle V, N\rangle \mathrm{dvol}$ (direkt ohne Verwendung des Divergenzsatzes).

(v) Welchem Integral entspricht nach dem Divergenzsatz der folgende Term:

$$\int_{K_a} \operatorname{div} V \,\mathrm{dvol} - \int_{\Omega_a} \langle V, N\rangle \mathrm{dvol}$$

Rechnen Sie dieses Integral einmal direkt aus (d.h. ohne Verwendung der in (ii) und (iv) ausgerechneten Integrale).

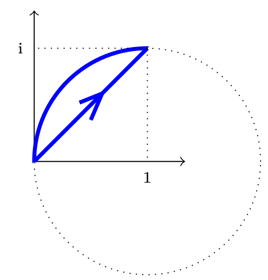
Aufgabe 7 (5=2+1+2)**.** (i) Definieren Sie 'komplex differenzierbar' und geben Sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an.

(ii) Was ist der Zusammenhang zwischen komplex differenzierbar und den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen?

(iii) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ diese komplex differenzierbar sind: $\frac{e^z}{z^2+1}$ und $\bar{z}^2$.

Aufgabe 8 (8=3.5+4.5)**.**

(i) Berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z} dz$, wobei γ die Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



(ii) Bestimmen Sie (mit Begründung) $\int_{\partial B_3(\mathrm{i})} z dz$ und $\int_{\partial B_2(\mathrm{i})} \frac{1}{(z^2+5)^2} dz$.