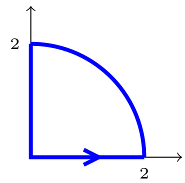
Nachklausur Erweiterung der Analysis WS 23/24

10.04.2024, Bearbeitungszeit: 3h

Aufgabe 1 (4=2+2).

(i) Berechnen Sie $\int_\gamma xyds$, wobei γ die Strecke im $\mathbb{R}^2$ von $(1,2)$ nach $(3,3)$ parametrisiert.

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = (x,y)^T$, wobei γ die Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



Aufgabe 2 (5=2+3).

(i) Sei $f\colon Q = [0,1]^3 \to \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Definieren Sie die k.te Obersumme $S^k(f)$ von f.

(ii) Sei $f\colon (x,y,z) \in Q = [0,1]^3 \mapsto xy \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Integrals, dass die Funktion f integrierbar ist.

Aufgabe 3 (5=1+2+2). Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto x$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Die Verwendung von Fubini ergebe

$$\int_\Omega f \mathrm{dvol} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy + \int_1^9 \int_{\frac{1}{2}(y-3)}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy.$$

(i) Berechnen Sie das Integral.

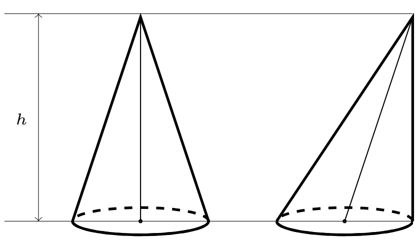
(ii) Skizzieren Sie Ω und geben Sie an, welcher Bereich von Ω zu welchem der beiden Summanden von oben gehört.

(iii) Verwenden Sie Fubini für $\int_\Omega f\mathrm{dvol}$ aber so, dass ein Integral der Form $\int_?^? \int_?^? f(x,y)dydx$ entsteht (Das entstandene Integral muss dann nicht berechnet werden).

Aufgabe 4 (1+2).

(i) Geben Sie die Formel zur Berechnung des Schwerpunkts einer Jordan-messbaren Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ an.

(ii) Links im Bild ist ein gerader Kegel, rechts ein schiefer. Beide haben Höhe h und eine kreisförmige Grundfläche mit Radius r. Zeichnen Sie die Schwerpunkte beider Körper ein – die x- und y-Koordinate dabei möglichst genau und die z-Koordinaten ungefähr (Dazu müssen Sie die Schwerpunkte nicht mittels der Formel in (i) berechnen – wichtig ist die ungefähre Lage in z-Richtung und vor allem die Relation der z-Koordinaten beider Schwerpunkte zueinander) und begründen Sie Ihre Wahl.

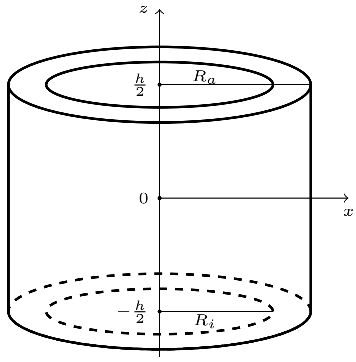


Aufgabe 5 (8=6+2)**.**

(i) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Hohlzylinders (Höhe h, Innenradius R_i, Außenradius R_a, s. Bild) bei Rotation

(a) um die z-Achse.

(b) um die x-Achse



(ii) Sei K ein Körper mit Volumen V und Schwerpunkt in $S = (S_x, S_y, S_z)$. Sei J_x das Trägheitsmoment von K bei Rotation um die x-Achse. Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_g von K bei Rotation um die Gerade $g = \{(x, a, b)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ in Abhängigkeit von J_x, V, a, b und S.

Aufgabe 6 (10=1+1,5+3+1,5+3)**.** Sei M die Menge aller Punkte $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$ und Ω die Menge aller Punkte $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 1$.

(i) Skizzieren Sie M und Ω.

(ii) Rechnen Sie mit dem Kriterium vom regulären Wert nach, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist.

(iii) Die Abbildung

$$\Phi\colon (r, \phi, \theta) \in U := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \left(r \cos\phi \cos\theta, \frac{r}{3} \sin\phi \cos\theta, r \sin\theta\right)^T \in \mathbb{R}^3$$

ist ein Diffeomorphismus aufs Bild und liefert damit Koordinaten des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $\operatorname{vol}\Omega$ mit Hilfe von Φ und der Transformationsformel.

(iv) Wann ist $\Phi(r, \phi, \theta) \in M$? Benutzen Sie dies um eine lokale Parametrisierung von M zu finden (mit Begründung).

(v) Berechnen Sie

$$\int_M \left\langle (x, y, z)^T, n \right\rangle \mathrm{dvol}$$

einmal direkt als Integral über M und einmal mittels des Divergenzsatzes. Hierbei sei n der äußere Einheitsnormalenvektor von Ω.

Aufgabe 7 (2)**.** Sei $V(x, y, z) = (e^{xy} \cos z, x^2 z, y)$ und $\Omega = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_\Omega \langle \operatorname{rot} V, (x, y, z)^T \rangle \mathrm{dvol}.$$

Aufgabe 8 (5=2+1+1+1).

(i) Definieren Sie 'komplex differenzierbar' und geben Sie die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen für eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an.

(ii) Was ist der Zusammenhang zwischen komplex differenzierbar und den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen?

(iii) Rechnen Sie einmal explizit mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit nach, dass $f(z) = \frac{1}{z+1}$ auf ihrem maximalem Definitionsbereich komplex differenzierbar ist. Geben Sie diesen maximalen Definitionsbereich auch explizit an.

(iv) Rechnen Sie für die Funktion aus (iii) explizit die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen nach.

Aufgabe 9 (8=2+2+4). Berechnen Sie bzw. bestimmen Sie jeweils mit Begründung folgende Integrale:

(i) $\int_{\partial B_2(2)} \frac{z^2}{(z-\mathrm{i})^2} dz$

(ii) $\int_{\partial B_1(0)} (\bar{z})^{-1} dz$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} dx$