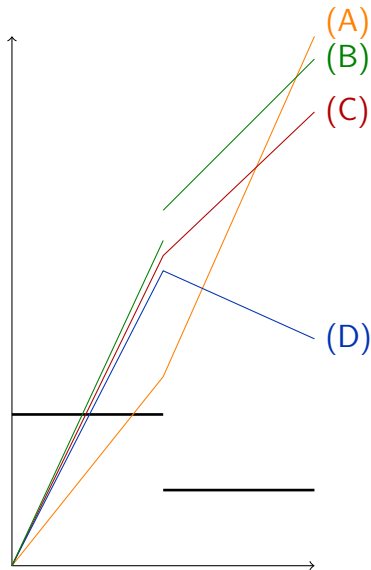


# QQ 1



$f$  sei die Treppenfunktion (schwarz) und sei

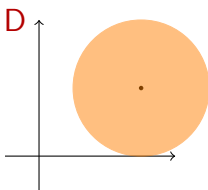
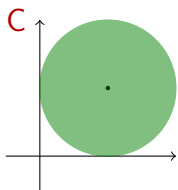
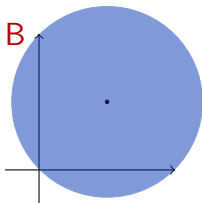
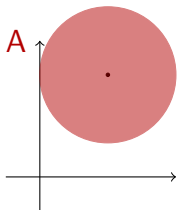
$$F(x) := \int_0^x f(x) dx$$

Was kann der Graph von  $F$  sein?

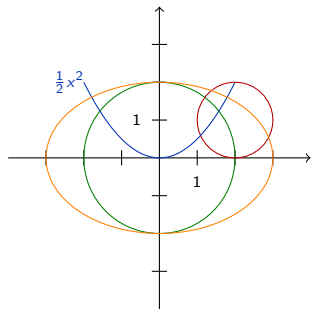
## QQ 2

Welches der Bilder kann die folgende Menge darstellen?

$$B_1\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| < 1 \right\}$$



## QQ 3



Finden Sie vier parametrisierte Kurven, die als Bild die Kurven links im Bild ergeben.

# QQ 4

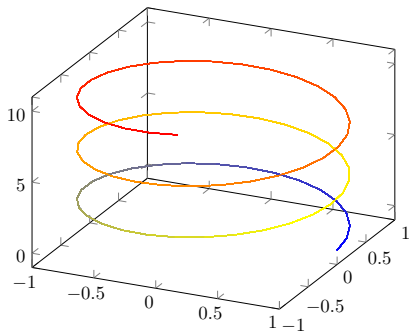
Welche der folgenden Kurven gehört zum Bild?

A  $(t \cos t, t \sin t, t)^T$

B  $(\cos t, \sin t, t)^T$

C  $(\cos t, t, \sin t)^T$

D  $(\cos^2 t, \sin^2 t, t^2)^T$



## QQ 5

Sei  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))^T$ . Das Bild von  $\gamma$  ist der Einheitskreis. Die Länge von  $\gamma$  ist

$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 4\pi$ , also nicht der Umfang des Kreises.  
Falsch oder gar kein Problem?

- A Das Integral wurde falsch berechnet.
- B Da  $\gamma$  nicht injektiv ist, ist die Formel für die Länge der Kurve dann nicht gültig.
- C Die Rechnung stimmt. Die Länge von  $\gamma$  muss doppelt so lang sein wie der Umfang des Kreises.
- D Die Länge der Kurve  $\gamma$  hat mit dem Umfang des Kreises sowieso nichts zu tun.

## QQ 6

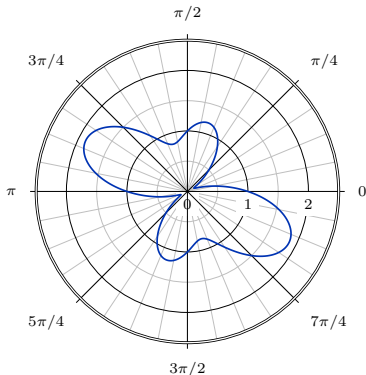
Welche der folgenden Funktionen gehört zum Bild?

A  $r(\theta) = 1 - \sin \theta \sin(3\theta)$

B  $r(\theta) = 1 - \cos \theta \cos(3\theta)$

C  $r(\theta) = 1 - \cos \theta \sin(3\theta)$

D  $r(\theta) = 1 - \sin \theta \cos(3\theta)$



Wie sieht die zugehörige Kurve  $\gamma(t)$  in euklidischen Koordinaten aus?

## QQ 7

Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve und  $f(x) = 1$ . Dann ist  $\int_{\gamma} f ds$

- A immer gleich Null.
- B immer gleich Eins.
- C immer gleich der Länge von  $\gamma$ .
- D Nichts von den dreien.

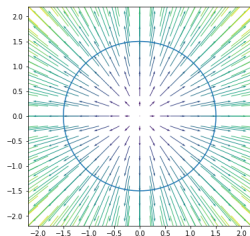
## QQ 8

Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  eine *geschlossene* stetig differenzierbare Kurve und  $f(z) = 1$ . Dann ist  $\int_{\gamma} f dz$

- A immer gleich Null.
- B immer gleich Eins.
- C immer gleich der Länge von  $\gamma$ .
- D Nichts von den dreien.

## QQ 9

Sei  $V(x, y) = (x, y)$  das radiale Vektorfeld im Bild. Sei  $\gamma$  eine glatte Kurve, deren Bild der blaue Kreis ist. Dann ist  $\int_{\gamma} V \cdot ds$



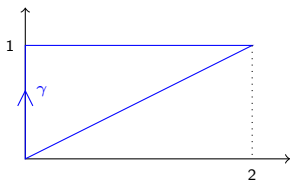
- A 0, da  $V$  bei Rotation um den Ursprung gleich bleibt.
- B 0, da  $V$  senkrecht auf dem Kreis steht.
- C  $2\pi$ , da  $V$  bei Rotation um den Ursprung gleich bleibt.
- D  $2\pi$ , da  $V$  senkrecht auf dem Kreis steht.

## QQ 10

Seien  $\Omega_1, \Omega_2 \subset Q \subset \mathbb{R}^n$  Jordan-messbar und  $Q$  ein achsenparalleler Quader. Was stimmt nicht?

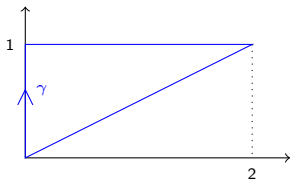
- A  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  ist Jordan-messbar mit  
 $\text{vol}_n(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \text{vol}_n \Omega_1 + \text{vol}_n \Omega_2$
- B  $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$  ist Jordan-messbar mit  
 $\text{vol}_{2n}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \text{vol}_n \Omega_1 \cdot \text{vol}_n \Omega_2$
- C  $Q \setminus \Omega_1$  ist Jordan-messbar mit  
 $\text{vol}_n Q \setminus \Omega_1 = \text{vol}_n Q - \text{vol}_n \Omega_1$
- D Ist  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , dann ist  $\text{vol}_n \Omega_1 \leq \text{vol}_n \Omega_2$ .

# QQ 11



Gesucht ist  $\int_{\gamma} V \cdot ds$  für  $V(x, y) = (x, 0)^T$ .

## QQ 12



Gesucht ist  $\int_{\gamma} f(z) dz$  für  $f(z) = \operatorname{Re} z$ .

## QQ 13

Sei  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Wie viele der folgenden Integrale kann man ausrechnen, um den Flächeninhalt von  $A$  zu erhalten?

- (i)  $\int_A \text{dvol}$
- (ii)  $\int_{[-1,1]^2} 1_A \text{dvol}$
- (iii)  $\int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$
- (iv)  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$

A 1      B 2      C 3      D 4

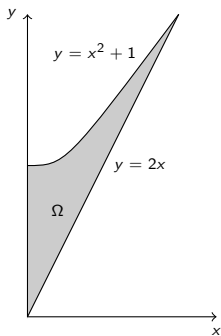
## QQ 14

Seien  $A \subsetneq B \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  ein Quader. Seien  $1_A, 1_B: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Sei  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f > 0$ . Was ist die stärkste Folgerung?

- A  $\int_A f \, d\text{vol} \leq \int_B f \, d\text{vol}$
- B  $\int_A f \, d\text{vol} < \int_B f \, d\text{vol}$
- C nichts davon, da  $f|_A$  und  $f|_B$  nicht integrierbar sein müssen.

# QQ 15

Welche Integrale berechnen den Flächeninhalt von  $\Omega$ ?



**A**  $\int_0^1 \left( \int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$  und

$$\int_0^2 \left( \int_0^{\frac{1}{2}y} dx + \int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}x} dx \right) dy$$

**B**  $\int_0^1 \left( \int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$  und

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy + \int_1^2 \left( \int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy$$

**C**  $\int_0^1 \left( \int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$  und  $\int_0^1 \left( \int_{2x}^{x^2+1} dx \right) dy$

**D**  $\int_0^2 \left( \int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$  und

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy + \int_1^2 \left( \int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy$$

## QQ 16

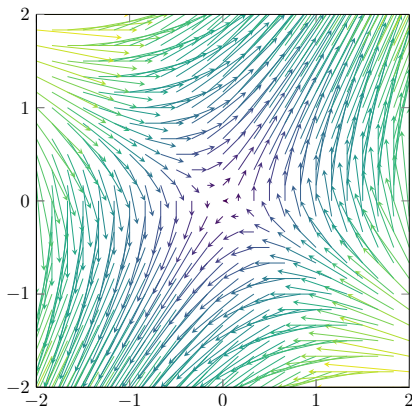
Was stimmt nicht für das folgende Vektorfeld:

$$V(x, y) = (\sin x \cosh y, -\cos x \sinh y)$$

- A  $\operatorname{rot} V = 0$
- B  $\operatorname{div} V = 0$
- C Es ist ein Gradientenvektorfeld, d.h. es gibt ein  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{grad} f = V$ .
- D Das Vektorfeld hat nur in  $(0, 0)$  eine Nullstelle.

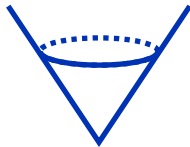
## QQ 17

Was kann man über die Divergenz und Rotation dieses Vektorfeldes sagen?



## QQ 18

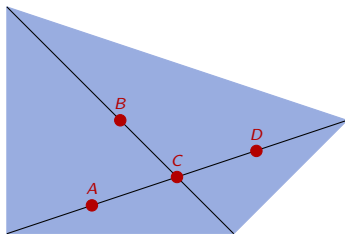
Welche Gleichung gehört zum Bild?



- A  $z = x^2 + y^2$
- B  $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$
- C  $z = |x| + |y|$
- D keine davon

## QQ 19

Welcher Punkt ist (ungefähr) der Schwerpunkt von der Menge im Bild?



## QQ 20

Skizzieren Sie  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  in:

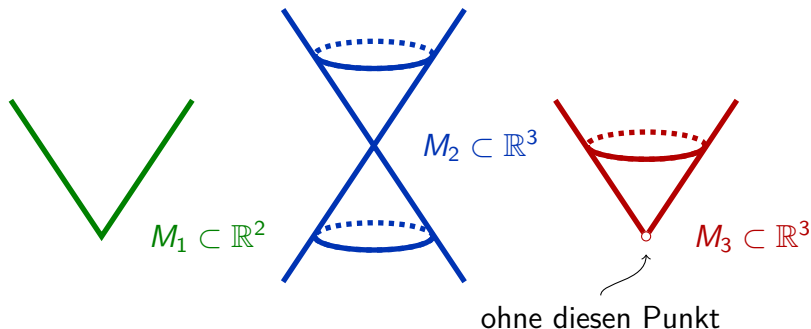
$$\int_{\Omega_1} \dots \, d\text{vol} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}x}^{\sin x} \dots \, dy dx$$

$$\int_{\Omega_2} \dots \, d\text{vol} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}y}^{\sin y} \dots \, dx dy$$

## QQ 21

Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten (also sind lokal Funktionsgraph einer glatten Funktion)?

(rein vom Bild her - ohne Beweis)



## QQ 22

Eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  ist durch die Ebenengleichung  $ax + by + cz = d$  für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  bestimmt.

Gibt das Kriterium vom regulären Wert hier, dass es sich um eine Untermannigfaltigkeit handelt?

## QQ 23

Die Ebene durch  $p \in \mathbb{R}^3$ , die durch die linear unabhängigen Vektoren  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  aufgespannt wird, ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit.

Was ist die Parameterdarstellung der Ebene? Ist das eine lokale Parametrisierung?

## QQ 24

Sei  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z \geq 0\}$ .

Skizzieren Sie  $M$  und geben Sie eine lokale Parametrisierung von  $M$  an.

## QQ 25

Sei  $M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0\}$ .

Mit dem Kriterium vom regulärem Wert kann man von welchen Punkten  $p \in M$  zeigen, dass  $M$  lokal um  $p$  eine Untermannigfaltigkeit ist?

- A Für kein  $p$ , da  $M$  keine Untermannigfaltigkeit ist.
- B Für alle  $p$ .
- C Für alle  $p$  außer der Spitze.
- D Keine dieser drei Antworten ist richtig.

## QQ 26

Finden Sie eine lokale Parametrisierung für den Kegel  
 $z^2 = x^2 + y^2, z > 0$ .

## QQ 27 – Bewegungsinvarianz

Isometrien des euklidischen Räumen:

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b, \text{ für } A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$$

Sei  $f: Q(= \text{Quader im } \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar.

Was ist dann  $\int_{\phi^{-1}(Q)} (f \circ \phi) d\text{vol}$ ? (einmal mit Anschauung und einmal mit Transformationssatz).

# QQ 28

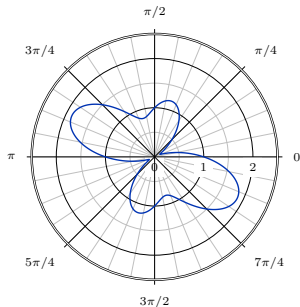
Der Flächeninhalt des Inneren der blauen Kurve  
 $r(\theta) = 1 - \cos \theta \sin(3\theta)$  wird berechnet durch:

A  $\int_0^{r(\theta)} \left( \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta \sin(3\theta)) d\theta \right) dr$

B  $\int_0^{r(\theta)} \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) r dr$

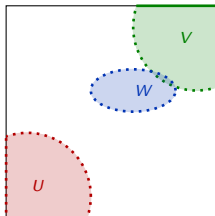
C  $\int_0^{2\pi} \left( \int_0^{r(\theta)} r dr \right) d\theta$

D  $\int_0^{2\pi} \left( \int_0^{r(\theta)} (1 - \cos \theta \sin(3\theta)) dr \right) d\theta$



## QQ 29 – Offene Mengen von Teilmengen

Wir betrachten  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  als metrischen Raum zusammen mit der euklidischen Metrik. Welche der folgenden Mengen sind offen als Teilmenge von  $[0, 1]^2$ , welche als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ ? ('Teile des Randes', die farblich hervorgehoben sind, ist Teil der Menge, ansonsten ist es gepunktet.)



## QQ 30 – Wie skalieren die Größen?

Was ist die Abhängigkeit folgender Größen von  $a > 0$ ?

A  $\text{vol}(B_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < a\})$

B  $\text{vol}(S_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = a\})$

## QQ 31

Sei  $F: (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, uv) \in \mathbb{R}^3$ .

Wie sieht  $F(\mathbb{R}^2)$  aus?

Ist  $F$  eine lokale Parametrisierung?

## QQ 32

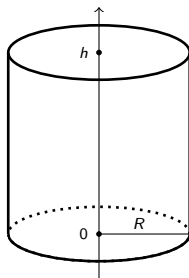
Sei  $F: (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, uv) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\int_{F([0,1]^2)} d\text{vol} = \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) du dv$$

Wie lautet der Volumenverzerrungsfaktor  $f(u, v)$ ?

## QQ 33

$\Omega$  sei der abgebildete Vollzylinder.



Was ist für jedes  $p \in \partial\Omega$  der äußere Einheitsnormalenvektor (wenn dort existent)?

Was ist eine lokale Parametrisierung der Mantelfläche?

## QQ 34

Welche der folgenden Darstellungen definieren immer Mengen im  $\mathbb{R}^3$ , die rotationssymmetrisch bzgl. der  $z$ -Achse sind? Welche zumindest manchmal, wenn die Funktion(en) 'gut' gewählt werden?

I  $x^2 + y^2 = f(z)^2$

II  $F(u, v) = (g(u) \cos v, g(u) \sin v, h(u))^T$

III  $F(u, v) = (u, v, j(u, v))^T$

## QQ 35

In der Definition einer Untermannigfaltigkeit  $M$  wird für die lokale Parametrisierung  $F$  um jedes  $p = F(u) \in M$  verlangt, dass  $D_u F$  maximalen Rang hat. Was bedeutet diese Bedingung anschaulich im Fall einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$  nicht?

- A In jedem Punkt von  $M$  gibt es eine Tangentialebene.
- B Der Tangentialraum  $T_{F(u)}M := D_u F(\mathbb{R}^2)$  hat für alle  $u$  die gleiche Dimension.
- C Alle Tangentialräume  $T_p M$  sind gleich.

## QQ 36

Bestimmen Sie alle Lösungen von:

A  $3z^2 - 10z + 3 = 0$

B  $z^4 = 1$

C  $z^3 = -z$

## QQ 37

Wir betrachten die Abbildung  $z \mapsto z^2$ . Zeichnen Sie die Bilder folgender Geraden:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$$

und

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z = 1, \operatorname{Im} z = \frac{3}{2}$$

Zeichnen Sie das Bild von  $[\frac{1}{2}, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}$ .

## QQ 38

Welche Funktion ist im angegebenen Bereich komplex differenzierbar?

A  $e^{z^2}$  auf  $B_1(0)$

B  $\bar{z}^2$  auf  $B_1(0)$

C  $\frac{1}{z-0.5}$  auf  $[0, 1]^2$

D  $\frac{1}{z-0.5}$  auf  $[0, 1]^2 \setminus \{(0.5, 1)\}$

## QQ 39

Kann man eine (und ja welchen) der Sätze  
Cauchy-Integralsatz/Cauchy-Integralformel/verallgemeinerte  
Cauchy-Integralformel anwenden?

A  $\int_{\partial B_1(0)} e^{z^2} dz$

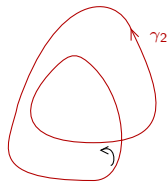
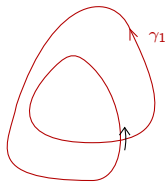
B  $\int_{\partial B_1(0)} \bar{z}^2 dz$

C  $\int_{\partial[0,1]^2} \frac{1}{z-0.5} dz$

D  $\int_{\partial[0,1]^2} \frac{\sin z}{(z-0.5)^3} dz$

## QQ 40

Die Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  haben die gleiche Spur, nur die Art diese Spur zu durchlaufen ist anders.



Mit welchem Kurvenintegral kann man  $\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$  darstellen?

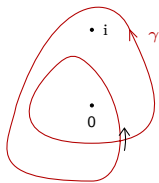
## QQ 41

Kann es eine holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  geben, die auf der  $x$ -Achse der Funktion  $|x|$  entspricht?

## QQ 42

Stellen Sie  $f(z) = z^2$  als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  dar.

# QQ 43



$$\int_{\gamma} \frac{z^3 + 2z}{z(z-i)^2} dz = ?$$

## QQ 44

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist in  $z_0 = x_0 + iy_0$  genau dann komplex differenzierbar, wenn  $f$  als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  reell differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  ist und in diesem Punkt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt.

Ist  $f$  automatisch reell differenzierbar, wenn es die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt? Nein!

Rechnen Sie nach, dass

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}^2 & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

in  $z = 0$  die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt, aber dort nicht reell differenzierbar ist.