

# Erweiterung der Analysis

Universität Freiburg, WS 24/25  
Nadine Große

Skript - Version vom 30. Oktober 2024

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.



# Inhaltsverzeichnis

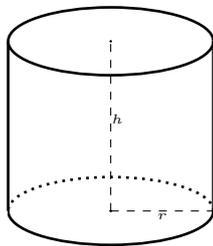
<b>1</b>	<b>Integration</b>	<b>3</b>
1.1	Kurvenintegrale . . . . .	3
1.1.1	Länge einer Kurve. . . . .	3
1.1.2	Kurvenintegral erster Art . . . . .	7
1.1.3	Kurvenintegral zweiter Art . . . . .	8
1.1.4	Komplexes Kurvenintegral . . . . .	9
1.2	Mehrfachintegrale . . . . .	10
1.2.1	Integrale über Quader . . . . .	10
1.2.2	Divergenz . . . . .	19
1.2.3	Rotation . . . . .	22
1.2.4	Schwerpunkte und andere Anwendungen . . . . .	23
1.3	Untermannigfaltigkeiten . . . . .	26
1.4	Volumina, die durch Untermannigfaltigkeiten eingeschlossen sind . . . . .	34
1.5	Integration in anderen Koordinaten . . . . .	36
1.5.1	Beispiele zur Volumenberechnung . . . . .	41
1.5.2	Integration auf Untermannigfaltigkeiten . . . . .	43
1.5.3	Divergenz- und Rotationssatz . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Funktionentheorie</b>	<b>57</b>
2.1	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	57
2.2	Cauchy Integralformel . . . . .	60
2.3	Erste Anwendungen . . . . .	63
2.4	Ausblick auf Riemannsche Flächen/mehrwertige Funktionen . . . . .	66
	<b>Literatur</b>	<b>68</b>



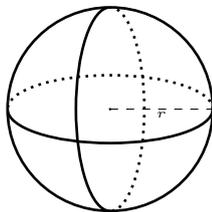
# Einleitung

In dieser Vorlesung werden wir uns in erster Linie mit Mehrfachintegralen und dann auch etwas Funktionentheorie beschäftigen. Mehrfachintegrale sind eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals in einer Variablen, welches wir in Analysis 1 kennengelernt haben.

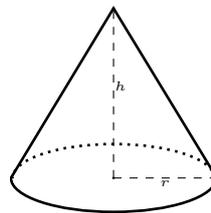
So wie man mit dem Riemann-Integral Flächeninhalte berechnen kann, können wir dann mit Mehrfachintegralen u.a. Volumina von Körpern berechnen. Die Berechnung von Volumina von Körpern sind Schulstoff (Klasse 9), z.B. [https://unterrichtenzum.de/wiki/Zylinder\\_Pyramide\\_Kegel](https://unterrichtenzum.de/wiki/Zylinder_Pyramide_Kegel).



Volumen:  $\pi r^2 h$   
 Oberfläche:  $2\pi r^2 + 2\pi r h$

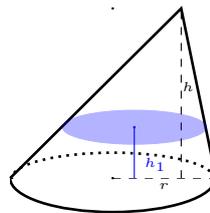
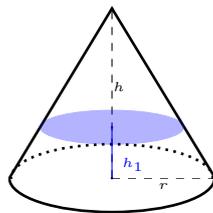


Volumen:  $\frac{4}{3}\pi r^3$   
 Oberfläche:  $4\pi r^2$



Volumen:  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$   
 Oberfläche:  $\pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

Dort werden die Formeln für die Berechnung der Volumina von Kugel, Zylinder, Kegel, etc. zwar nicht über Mehrfachintegrale behandelt, aber es werden auch nicht nur die Formeln angegeben, sondern diese heuristisch hergeleitet und es werden einige wichtige Prinzipien behandelt, z.B. das Prinzip des Cavalieri:



Prinzip des Cavalieri: Haben für zwei Körper mit gleicher Höhe für alle  $h_1 \in (0, h)$  die Querschnittsflächen den gleichen Flächeninhalt, dann haben die Körper das gleiche Volumen.

## *Inhaltsverzeichnis*

Im Abitur wird außerdem als Anwendung der Integrationsrechnung zumindest Volumina von Rotationskörpern behandelt\*.

Ein Ziel dieser Veranstaltung ist es mit Mehrfachintegralen zu verstehen, wo diese Formeln, die man aus dem Schulunterricht kennt, herkommen und ggf. für einen neuen Körper das Volumen selbst zu berechnen. Dies wird aber nicht die einzige Anwendung von Mehrfachintegralen sein, so kann man z.B. auch Schwerpunkte berechnen.

In der Schule lernt man aber nicht nur Formeln für Volumina spezieller Körper, sondern auch für deren Oberfläche. Auch dafür werden Mehrfachintegrale nützlich sein, allerdings dann Mehrfachintegrale über Untermannigfaltigkeiten (also gekrümmte Flächen). Auch dies werden wir behandeln und so z.B. den Oberflächeninhalt einer Kugel herleiten. In diesem Kontext werden auch oft Integrale über Kurven auftauchen, die wir in diesem Kurs als erstes behandeln werden. Dazu gehört als ein Spezialfall auch die Länge von Kurven.

Der zweite kleinere Teil der Vorlesung beschäftigt sich mit Funktionentheorie/komplexer Analysis. Das ist Analysis von Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Zum einen ist das eine Fortführung der Analysis 1 nur jetzt für eine komplexe statt ein reelle Variable. Da man  $\mathbb{C}$  mit dem  $\mathbb{R}^2$  identifizieren kann, ergibt sich auch eine Brücke zu Analysis und Integration auf  $\mathbb{R}^2$ .

---

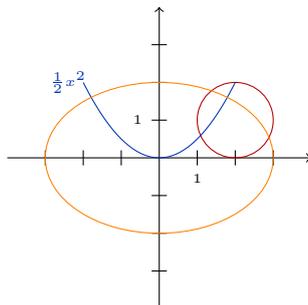
\*<https://rp.baden-wuerttemberg.de/rps/abt7/ref75/fachberater/seiten/mathematik/>

# 1 Integration

## 1.1 Kurvenintegrale

### 1.1.1 Länge einer Kurve.

Ziel: Wie berechnet man Längen von Kurven? Zum Beispiel von:



**Definition 1.1.1.** Sei  $I$  ein Intervall. Eine stetige Abbildung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^k$  heißt (*parametrisierte*) *Kurve*. Das Bild  $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^k$  nennt man *Spur der Kurve*.

*Interpretation:* Die Funktion  $\gamma$  beschreibe den Ort eines Objekts/Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit. Dann kann man die Spur der Kurve als Foto der Bewegung unter Langzeitbelichtung verstehen.

Wir würden nun gerne (wenn möglich) der Kurve eine Länge zuordnen. Idee: Sei  $I = [a, b]$  und sei  $\mathcal{Z} = (x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b)$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Wir nähern  $\gamma$  durch den mittels  $\gamma(x_i)$  gebildeten Polygonzug an, vgl. Abbildung 1.1. Dieser hat die Länge

$$L(\mathcal{Z}, \gamma) := \sum_{j=1}^n |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|.$$

Ist  $\tilde{\mathcal{Z}}$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{Z}$ , d.h. alle Punkte von  $\mathcal{Z}$  sind auch Punkte in  $\tilde{\mathcal{Z}}$ , dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$L(\tilde{\mathcal{Z}}, \gamma) \geq L(\mathcal{Z}, \gamma).$$

**Definition 1.1.2.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine parametrisierte Kurve. Falls das Supremum von  $L(\mathcal{Z}, \gamma)$  über alle Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  von  $[a, b]$  endlich ist, nennen wir  $\gamma$  *rektifizierbar* und nennen

$$L(\gamma) := \sup_{\mathcal{Z}} L(\mathcal{Z}, \gamma)$$

## 1 Integration

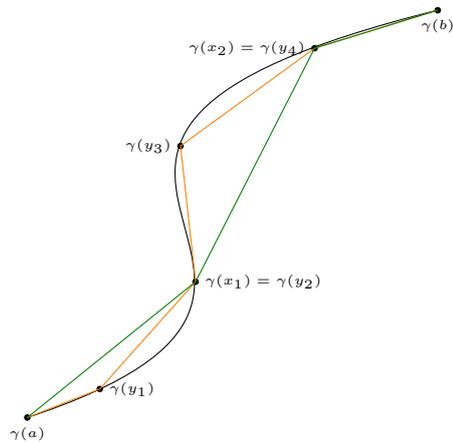


Abbildung 1.1: Der Polygonzug zu  $\gamma$  bzgl. einer Zerlegung  $(x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$  und einer Verfeinerung  $(y_0 = a, y_1, y_2, \dots, y_n = b)$  davon.

die Länge von  $\gamma$ .

Bald zeigen wir, dass die Länge von  $\gamma$  nicht von der Parametrisierung abhängt, also nicht davon mit welcher Geschwindigkeit die Kurve durchlaufen wird, solange alle Punkte gleich oft durchlaufen werden. Das ist ja auch das, was man von einer Länge erwarten würde. Läuft man Teile der Kurve mehrfach durch, so wird auch die Länge dieser Zeile mehrfach gezählt.

Aber nicht alle Kurven müssen eine endliche Länge haben. Wir sehen z.B. in ÜA1, dass der Flächeninhalt einer 'Schneeflockenkurve' zwar endlich ist, ihre Länge jedoch unendlich.

**Lemma 1.1.3.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Dann ist  $\gamma$  rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

*Beweis.* Da  $\gamma$  stetig differenzierbar ist, ist  $|\gamma'(t)|$  in  $t$  stetig und somit existiert  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ . Nach dem Hauptsatz der Analysis [1, Satz 4.5.47] haben wir

$$|\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})| = \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\gamma'(t)| dt$$

und somit direkt

$$L(\mathcal{Z}, \gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Also ist  $\sup_{\mathcal{Z}} L(\mathcal{Z}, \gamma)$  endlich,  $\gamma$  rektifizierbar und  $L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen: Da  $\gamma'$  auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  stetig ist, ist es sogar gleichmäßig stetig, vgl. [1, Satz 4.5.10]. D.h. für  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \epsilon$$

für alle  $s, t \in [a, b]$  mit  $|s - t| < \delta$  ist. Sei nun  $\epsilon > 0$  und  $\delta$ , das  $\delta$  aus der letzten Zeile zu diesem  $\epsilon$ . Sei  $\mathcal{Z}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit  $x_j - x_{j-1} < \delta$  für alle  $j$ . Dann gilt für  $t \in [x_{j-1}, x_j]$

$$|\gamma'(t)| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |\gamma'(t) - \gamma'(x_j)| + |\gamma'(x_j)| \leq \epsilon + |\gamma'(x_j)|$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\gamma'(t)| dt \leq \sum_{j=1}^n \sup_{[x_{j-1}, x_j]} |\gamma'| (x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (|\gamma'(x_j)| + \epsilon)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\gamma'(x_j) - \gamma'(t) + \gamma'(t)) dt \right| + \epsilon(b-a) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\gamma'(t) - \gamma'(x_j)| dt + \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \gamma'(t) dt \right| \right) + \epsilon(b-a) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (\epsilon(x_j - x_{j-1}) + |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|) + \epsilon(b-a) \\ &\leq 2\epsilon(b-a) + L(\mathcal{Z}, \gamma) \end{aligned}$$

Dies gilt für alle Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  von  $[a, b]$  mit  $x_j - x_{j-1} < \delta$  für alle  $j$ . Bilden wir nun das Supremum von  $L(\mathcal{Z}, \gamma)$  über diese Zerlegungen erhalten wir sogar das Supremum über alle Zerlegungen, da  $L(\mathcal{Z}, \gamma)$  bei Verfeinerung der Zerlegung nicht kleiner wird. Es ist also  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq 2\epsilon(b-a) + L(\gamma)$ . Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 1.1.4.** Die Kurve  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)^T$ , parametrisiert einen Kreis vom Radius  $R$  entgegen dem Uhrzeigersinn (Dem Parameter  $t$  entspricht hier anschaulich dem Winkel von  $\gamma(t)$  mit der positiven  $x$ -Achse). Es gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |(-R \sin t, R \cos t)^T| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

An der Anschauung mit dem Polygonzug zeigt sich schon, dass die Länge von  $\gamma$  nur von der Spur  $\text{Bild}(\gamma)$  abhängen kann, sofern jeder Punkt von  $\text{Bild}(\gamma)$  nur einmal durchlaufen wird:

Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig Kurve. Sei  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  ein Homöomorphismus\*. Dann nennen wir  $\varphi$  eine *Umparametrisierung*. Die Kurve  $\gamma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat

---

\*Homöomorphismus = stetig, invertierbar und Umkehrabbildung auch stetig

## 1 Integration

dann die gleiche Spur wie  $\gamma$ . Gilt  $\varphi(c) = a$ , so nennen wir die Umparametrisierung *orientierungserhaltend* sonst *orientierungsumkehrend*.

Zum Beispiel sei  $\gamma: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Kurve und  $\varphi(t) = -t$ . Dann ist  $\varphi$  orientierungsumkehrend und die Kurve  $\gamma \circ \varphi$  wird in der Zeit  $t$  in die andere Richtung durchlaufen als  $\gamma$ .

Der Vollständigkeit halber wollen wir die Unabhängigkeit der Länge einer Kurve von der Parametrisierung nachrechnen. Dazu sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve und  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus\*. Da  $\varphi$  bijektiv ist, kann  $\varphi'$  das Vorzeichen nicht wechseln und es ist  $\varphi'$  positiv für  $\varphi$  orientierungserhaltend (und dann ist insbesondere  $\varphi(c) = a$  und  $\varphi(d) = b$ ) und sonst negativ (dann ist  $\varphi(c) = b$  und  $\varphi(d) = a$ ). Mit der Substitutionsregel gilt somit

$$\begin{aligned} L(\gamma \circ \varphi) &= \int_c^d |\gamma'(\varphi(s))| |\varphi'(s)| ds = \pm \int_c^d |\gamma'(\varphi(s))| |\varphi'(s)| ds \\ &\stackrel{t=\varphi(s)}{=} \pm \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

Die Länge der Kurve bleibt also bei Umparametrisierung erhalten.

Alles obere gilt auch für stückweise stetig differenzierbare Kurven:

**Definition 1.1.5.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann heißt  $\gamma$  *stückweise stetig differenzierbar* bzw. *stückweise- $C^1$* , falls es ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  mit  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$  gibt, so dass  $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}$  für alle  $i = 0, \dots, m-1$  stetig differenzierbar ist.

*Warum will man auch solche Kurven behandeln können?* Will man z.B. ein Quadrat als Kurve beschreiben, dann ist es möglich, dies so zu gestalten, dass die Kurve stetig differenzierbar ist (zu den Ecken hin muss die Geschwindigkeit gegen Null gehen). Lassen wir aber stückweise stetig differenzierbare Kurven so, lässt sich das Quadrat viel natürlicher parametrisieren, indem man die Kanten mit konstanter Geschwindigkeit (also  $|\gamma'(t)| = \text{konstant}$ ) durchläuft.

Auch solche stückweise- $C^1$ -Kurven sind mit genau dem gleichen Beweis wie oben rektifizierbar, und wir können noch immer  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$  bilden, da  $\gamma'(t)$  auf  $(x_i, x_{i+1})$  jeweils stetig ist und jeweils auf  $[x_i, x_{i+1}]$  stetig erweiterbar ist – also

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt.$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes noch zwei Begriffe, die öfter vorkommen:

---

\* $C^1$  = stetig differenzierbar,  
 $C^1$ -Diffeomorphismus =  $C^1$ , invertierbar und Umkehrabbildung auch  $C^1$ .

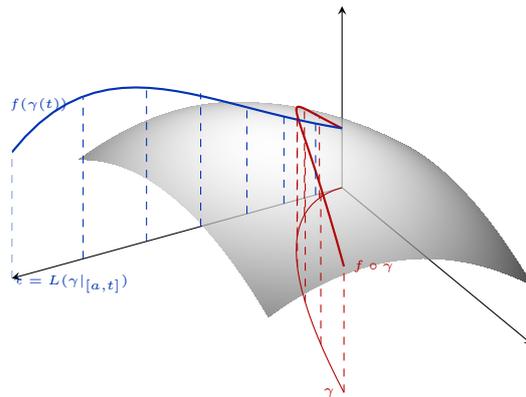


Abbildung 1.2: Den Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  haben wir auf die  $x$ -Achse und  $f \circ \gamma$  auf die  $x - z$ -Ebene abgerollt. Das Kurvenintegral erster Art  $\int_{\gamma} f ds$  ist dann gleich dem Integral von  $f(x)$  über  $x (= L(\gamma|[a, t]))$  von 0 bis  $L(\gamma)$ .

**Definition 1.1.6.** Eine Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *geschlossen*, wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt. Die Kurve  $\gamma$  heißt *einfach geschlossen*, wenn sie geschlossen ist und aus  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  entweder  $t_1 = t_2$  oder  $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$  folgt.

Eine Kurve, die die Zahl 8 parametrisiert, ist zwar geschlossen, kann aber nie einfach geschlossen sein.

### 1.1.2 Kurvenintegral erster Art

**Definition 1.1.7.** Sei  $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (stückweise)\* stetig differenzierbare Kurve. Sei  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit Bild  $(\gamma) \subset U$ . Dann ist das *Kurvenintegral erster Art von  $f$  über  $\gamma$*  gleich

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

**Wo kommt die Definition her?** Wir stellen uns  $f \circ \gamma$  in eine Ebene abgerollt vor, vgl. Abbildung 1.2. Dort ist dann die Funktion parametrisiert gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= L(\gamma|[a, t]) := \int_a^t |\gamma'(s)| ds \\ y(x(t)) &= f(\gamma(t)). \end{aligned}$$

\*Ist  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar, existiert  $\gamma'(t)$  für alle  $t \in [a, b]$  bis auf endlich viele. In diesem Fall ist das Integral wie oben bei der Länge jeweils als Summe über die Intervalle, in denen die Kurve stetig differenzierbar ist.

## 1 Integration

Nach der Substitutionsregel ist wegen  $x'(t) = |\gamma'(t)|$

$$\int_0^{L(\gamma)} y(x) dx = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

**Vorl. 2** – also genau unsere Definition. Da die linke Seite nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt (gleiche Rechnung wie bei der Länge einer Kurve), hängt auch  $\int_{\gamma} f ds$  nicht von der Parametrisierung der Kurve ab.

### 1.1.3 Kurvenintegral zweiter Art

**Definition 1.1.8.** Sei  $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Sei  $V: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld\* mit Bild  $(\gamma) \subset U$ . Dann ist das *Kurvenintegral zweiter Art von  $V$  über  $\gamma$*  gleich

$$\int_{\gamma} V \cdot ds := \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Das  $\cdot$  in  $V \cdot ds$  deutet auf die Verwendung des Skalarproduktes hin.

**Für die Anschauung:** Entlang  $\gamma$  wird das Vektorfeld  $V$  auf  $\gamma'$  (also die Tangente von  $\gamma$  in  $t$ ) projiziert und zwar derart, dass die Länge des projizierten Vektors gleich  $\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  ist. (Wenn  $|\gamma'(t)| = 1$  ist, ist dies auch gleich der Länge des orthogonal projizierten Vektors. Sonst die des orthogonal projizierten Vektors mal  $|\gamma'(t)|$ .)

**Lemma 1.1.9.** Sei  $V$  und  $\gamma$  wie oben. Sei  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Dann ist

$$\int_{\gamma} V \cdot ds = \pm \int_{\gamma \circ \varphi} V \cdot ds,$$

wobei dort ein  $+$  steht, wenn  $\varphi$  orientierungserhaltend ist, und sonst ein  $-$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} V \cdot ds &= \int_c^d \langle V(\gamma(\varphi(s))), (\gamma \circ \varphi)'(s) \rangle ds \\ &= \int_c^d \langle V(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \pm \int_{\gamma} V \cdot ds \end{aligned}$$

(Für  $\varphi$  orientierungsumkehrend ist,  $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \int_b^a = - \int_a^b$ .) □

---

\*Eine Funktion von  $U \subset \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$  wird auch Vektorfeld auf  $U$  genannt, weil man sie sich graphisch veranschaulichen kann, indem man in jedem Punkt von  $U$  das zugehörige Bild als Vektor angeheftet vorstellen kann und so ein 'Feld' aus Vektoren entsteht.

**Beispiel 1.1.10.** Wir betrachten das Vektorfeld  $V(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)^T$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Sei  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\cos t, \sin t)^T$  (parametrisiert den Einheitskreis entgegen des Uhrzeigersinns). Dann ist

$$\int_{\gamma} V \cdot ds = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = 2\pi.$$

### 1.1.4 Komplexes Kurvenintegral

Wir wollen nun noch ein weiteres spezielles Kurvenintegral behandeln – das komplexe Kurvenintegral. Dies ist für Kurven in  $\mathbb{R}^2$ , den wir hier mit  $\mathbb{C}$  identifizieren und komplexwertige Funktionen:

**Definition 1.1.11.** Sei  $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, so dass  $f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist. Dann ist das *komplexe Kurvenintegral von  $f$  über  $\gamma$*  gleich

$$\int_{\gamma} f dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Im ersten Moment sieht es sehr ähnlich aus zum Kurvenintegral erster Art – nur steht hier  $\gamma'(t)$  statt dessen Betrag. Es ist aber etwas anderes: Da  $\gamma'(t)$  im Fall einer Kurve in  $\mathbb{C}$  selbst wieder in  $\mathbb{C}$  ist, können wir nun aber sogar mit  $\gamma'(t)$  statt nur mit dem Betrag multiplizieren. In ÜA5 werden wir die verschiedenen Kurvenintegrale einmal miteinander vergleichen.

Ganz analog zu den vorherigen Kurvenintegralen können wir wieder nachrechnen, wie sich das Integral unter Umparametrisierung der Kurve verhält – es bleibt gleich modulo Vorzeichen.

**Bemerkung 1.1.12** (Wdh. Ableitung und Integration komplexer Funktionen in einer reellen Variablen). Seien  $g, h: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Die *Ableitung* (wenn existent) von  $g$  ist definiert als  $g'(t) := (\operatorname{Re} g)'(t) + i(\operatorname{Im} g)'(t)$ . Es gelten die analogen Rechenregeln wie für reellwertige Funktionen, z.B. Linearität,  $(gh)'(t) = g(t)h'(t) + g'(t)h(t)$  und  $(g \circ \varphi)'(t) = g'(\varphi(t))\varphi'(t)$  für  $\varphi: J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ .

Das *Integral* (wieder wenn existent) von  $g$  ist definiert als  $\int_I g(t) dt := \int_I (\operatorname{Re} g)(t) dt + i \int_I (\operatorname{Im} g)(t) dt$ . Es gelten wieder die analogen Rechenregeln wie für reellwertige Funktionen, z.B. Hauptsatz der Analysis, partielle Integration und Substitutionsregel.

**Beispiel 1.1.13.** Die Kurve\*  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $t \in (0, 2\pi]$ , parametrisiert den Kreis um  $a \in \mathbb{C}$  mit Radius  $r > 0$ . Sei  $f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto (z - a)^{-k}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{r^{-k} e^{-ikt}}_{=f(\gamma(t))} \underbrace{rie^{it}}_{=\gamma'(t)} dt = ir^{1-k} \int_0^{2\pi} e^{it(1-k)} dt = 2\pi ir^{1-k} \delta_{k1}.$$

---

\*Hier benutzen wir die Eulersche Formel  $\cos t + i \sin t = e^{it}$ . Das  $\gamma(t)$  entspricht als Punkt in  $\mathbb{R}^2$  dem Vektor  $(\operatorname{Re} a + r \cos t, \operatorname{Im} a + r \sin t)^T$ .

## 1 Integration

**Beispiel 1.1.14.** Sei  $\gamma$  die blaue Kurve im Bild; in Pfeilrichtung durchlaufen. Wir wollen  $\int_{\gamma} f(z)dz$  berechnen mit  $f(z)$  eine Quadratwurzel von  $z$  und zwar  $f(z = re^{i\varphi}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} =: \sqrt{z}$ . Auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\}$  ist  $f$  dann stetig.\* Die Kurve  $\gamma$  ist die Hintereinanderausführung der drei Teilkurven  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  wie im

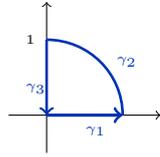


Bild. Damit ist  $\int_{\gamma} \sqrt{z}dz = \int_{\gamma_1} \sqrt{z}dz + \int_{\gamma_2} \sqrt{z}dz + \int_{\gamma_3} \sqrt{z}dz$ .

Für das Integral über  $\gamma_1$  parametrisieren wir  $\gamma_1(t) = t$  für  $t \in [0, 1]$ . Damit ist  $\int_{\gamma_1} \sqrt{z}dz = \int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{2}{3}$ . Für das

Integral über  $\gamma_2$  parametrisieren wir  $\gamma_2(t) = e^{it}$  für  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Somit ist  $\int_{\gamma_2} \sqrt{z}dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it/2}ie^{it} dt = \frac{2}{3}e^{i\frac{3}{2}t}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}(e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1)$ .

Es bleibt  $\gamma_3(t) = i(1 - t)$  für  $t \in [0, 1]$  und somit

$$\int_{\gamma_3} \sqrt{1-t}e^{i\frac{\pi}{4}}(-i)dt = -e^{i\frac{3\pi}{4}} \int_{\gamma_3} \sqrt{1-t}dt = e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = -e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{2}{3}.$$

In der Summe haben wir somit  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ .

Wir werden später sehen, vgl. Satz 2.2.1, dass dies kein Zufall ist, sondern dass dies daran liegt, dass die Kurve geschlossen ist und  $f$  im gesamten Gebiet, was durch die Kurve eingeschlossen wird, komplex differenzierbar (ein Begriff, den wir erst später einführen) ist.

## 1.2 Mehrfachintegrale

### Vorl. 3 1.2.1 Integrale über Quader

Bis jetzt haben wir eigentlich immer nur Funktionen in einer Variablen integriert: In Analysis 1 für Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und auch jetzt waren die Kurvenintegrale am Ende auch nur Integrale in einer Variablen – dem Parameter der Kurve.

Nun wollen wir auch einige Funktionen  $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrieren. Dazu verallgemeinern wir das Konzept der Ober- und Untersumme aus Analysis 1, vgl. Abbildung 1.3.

**Definition 1.2.1.** Sei  $I_j = [a_j, b_j]$ . Sei  $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n := \prod_{j=1}^n I_j \subset \mathbb{R}^n$  (ein achsenparalleler Quader). Eine *Zerlegung  $\mathcal{Z}$  der Ordnung  $k$*  sei die Menge der (achsenparallelen) Quader

$$Q_{i_1 \dots i_n}^k := \prod_{j=1}^n \left[ a_j + \frac{i_j - 1}{k}(b_j - a_j), a_j + \frac{i_j}{k}(b_j - a_j) \right]$$

mit  $i_j \in \{1, \dots, k\}$ . Wir setzen  $\text{vol } Q := \prod_{j=1}^n |b_j - a_j|$ . Sei  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

\*Es gibt ja immer zwei Quadratwurzeln einer komplexen Zahl  $re^{i\varphi}$  – nämlich  $\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  und  $\sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}$ . Wir wählen hier immer die erste. Man muss etwas aufpassen, da die Zuordnung  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mapsto \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} \in \mathbb{C}$  nicht stetig ist – aber auf der hier gewählten Menge ist diese Zuordnung stetig. Mehr dazu später im Teil zur Funktionentheorie, vgl. Abschnitt 2.4.

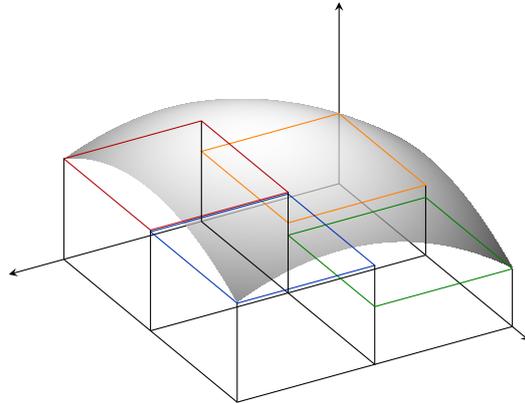


Abbildung 1.3: Das Volumen unter einer Funktion  $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  wird durch eine Summe von Volumina von Quadern angenähert.

Wir nennen

$$S_k(f) := \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k \text{vol } Q_{i_1 \dots i_n}^k \inf_{x \in Q_{i_1 \dots i_n}^k} f(x) = \frac{\text{vol } Q}{k^n} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k \inf_{x \in Q_{i_1 \dots i_n}^k} f(x)$$

die  $k$ -te *Untersumme* von  $f$

$$S^k(f) := \frac{\text{vol } Q}{k^n} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k \sup_{x \in Q_{i_1 \dots i_n}^k} f(x)$$

die  $k$ -te *Obersumme* von  $f$ .

Eine Funktion  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *unterhalb/oberhalb integrierbar*, falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(f) \text{ bzw. } \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(f)$$

existiert. In diesem Fall setzen wir

$$\int_Q f \, \text{dvol} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(f) \text{ bzw. } \overline{\int_Q f \, \text{dvol}} = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(f).$$

Die Funktion  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *integrierbar*, falls sie sowohl unterhalb als auch oberhalb integrierbar ist und beide Integrale übereinstimmen. In diesem Fall setzen wir

$$\int_Q f \, \text{dvol} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(f).$$

## 1 Integration

Die Folgen  $(S_k(f))_k$  und  $(S^k(f))_k$  sind beide monoton und, da  $f$  beschränkt ist, auch beschränkt. Damit existiert hier in unserer Situation das untere und obere Integral immer, aber sie müssen i.A. nicht übereinstimmen. Ein Standardbeispiel einer beschränkten Funktion in einer Variablen auf  $[0, 1]$ , welche nicht Riemann-integrierbar ist, ist die Dirichletfunktion  $1_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ . Daraus kann man sich auch eine Funktion in mehreren Variablen bauen, die nicht integrierbar ist, vgl. ÜA 10.

**Beispiel 1.2.2.** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein (achsenparalleler) Quader\* und  $1_Q: Q \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$ . Dann gilt  $S_k(f) = \frac{\text{vol } Q}{k^n} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k 1 = \text{vol } Q$ . Analog  $S^k(f) = \text{vol } Q$ . Also ist  $1_Q$  insbesondere integrierbar.

Allgemeiner definieren wir:

**Definition 1.2.3.** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein (achsenparalleler) Quader und  $\Omega \subset Q$ . Die Funktion

$$1_\Omega: Q \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \begin{cases} 1 & z \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *charakteristische Funktion von  $\Omega$* .

Ist  $1_\Omega$  integrierbar, dann nennen wir  $\Omega$  *Jordan-messbar* und

$$\text{vol } \Omega := \int_\Omega \text{dvol} := \int_Q 1_\Omega \text{dvol}$$

das *Volumen von  $\Omega$* .

Solange der Quader von  $Q$  groß genug, um  $\Omega$  zu enthalten, hängt das Integral  $\int_Q \text{dvol}$  (sofern es existiert) nicht von  $Q$  ab. Wir packen  $\Omega$  aber immer in einen Quader, damit wir endliche Summen bei den Ober-/Untersummen haben.

Für  $\Omega = Q$  ein achsenparalleler Quader ist nach obigem Beispiel das eben definierte  $\text{vol } Q$  gleich dem aus Definition 1.2.1.

**Bemerkung 1.2.4.** Manchmal ist es wichtig explizit zu unterscheiden, von welchem  $\mathbb{R}^n$  wir unsere Menge  $\Omega$  gerade als Teilmenge sehen. Betrachtet man  $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , dann ist  $\text{vol } \Omega = 1$ . Aber wir könnten  $\Omega$  auch durch  $[0, 1] \times \{0\}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  auffassen, dann wäre das Volumen Null, vgl. Abbildung 1.4. Wenn diese Unterscheidung nötig ist, schreiben wir  $\text{vol}_n \Omega$ , um zu sagen, dass  $\Omega$  hier eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist. Also  $\text{vol}_1[0, 1] = 1$ , aber  $\text{vol}_2[0, 1] = 0$ .

**Bemerkung 1.2.5.** Was sich aus der Definition der Integrierbarkeit auch direkt ergibt: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Jordan-messbar (also  $1_\Omega$  sei integrierbar).

- Das Volumen ist invariant unter Translation:<sup>†</sup> D.h.  $\text{vol } \Omega = \text{vol } (\Omega + a)$  gilt für  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $\Omega + a := \{x + a \mid x \in \Omega\}$  (Man verschiebt einfach den unterliegenden Quader  $Q$  auch um  $a$ , dann bleiben Obersummen und Untersummen erhalten).

\*Ab sofort meinen wir mit Quader, wenn nicht anders gesagt, immer einen achsenparallelen Quader.

<sup>†</sup>Das Volumen ist invariant unter allen euklidischen Bewegungen, also auch Rotationen, aber dafür müssen wir später mehr arbeiten (Das wird aus der Transformationsformel, vgl. Abschnitt 1.5, folgen.).

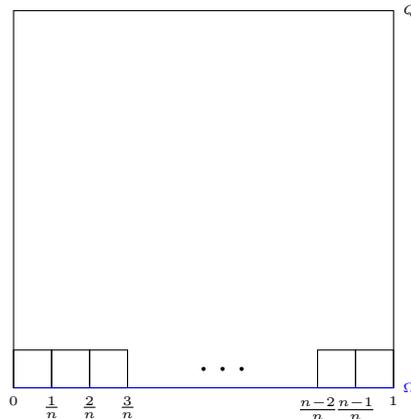


Abbildung 1.4: Betrachtet man  $\Omega = [0, 1] \times \{0\} \subset Q = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ , dann ist  $S_n(1_\Omega) = 0$  für alle  $n$ , da kein noch so kleines Teilquadrat in  $\Omega$  passt. Die Obersumme  $S^n(1_\Omega) = \frac{1}{n}$ . Also ist  $\text{vol}_2 \Omega = 0$ . Dagegen ist  $\text{vol}_1 [0, 1] = 1$ .

- Bei Skalierung von  $\Omega$  mit  $r > 0$  skaliert das Volumen mit  $r^n$ : D.h.  $r^n \text{vol } \Omega = \text{vol}(r\Omega)$  gilt für  $r\Omega := \{rx \mid x \in \Omega\}$  (Man skaliert den unterliegenden Quader  $Q$  auch um  $r$ ).

**Satz 1.2.6.** Die Menge  $\mathcal{R}_Q := \{\text{Integrierbare Funktionen } Q \rightarrow \mathbb{R}\}$  bildet (mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen) einen Vektorraum. Die Abbildung

$$\int_Q : \{\text{Integrierbare Funktionen } Q \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_Q f \, d\text{vol}$$

erfüllt: Für alle  $f, g \in \mathcal{R}_Q$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

- *Linearität:*  $\alpha f + g \in \mathcal{R}_Q$  und  $\int_Q (\alpha f + g) \, d\text{vol} = \alpha \int_Q f \, d\text{vol} + \int_Q g \, d\text{vol}$ .
- *Monotonie:* Aus  $f \leq g$  folgt  $\int_Q f \, d\text{vol} \leq \int_Q g \, d\text{vol}$ .
- *Beschränktheit:* Ist  $f$  beschränkt, dann gilt  $\left| \int_Q f \, d\text{vol} \right| \leq \text{vol } Q \sup_Q |f|$ .
- *Additivität:* Ist  $Q = Q_1 \cup Q_2$  für  $Q_i$  achsenparallele Quader mit  $\text{vol}(Q_1 \cap Q_2) = 0$ , dann gilt  $\int_Q f \, d\text{vol} = \int_{Q_1} f \, d\text{vol} + \int_{Q_2} f \, d\text{vol}$ .

Analoge Aussagen gelten für unterhalb/oberhalb integrierbare Funktionen.

Stetige Funktionen  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  sind integrierbar.

*Beweis.* Alles genau wie in Analysis 1, vgl. [1, Satz 4.5.8, 4.5.9 und 4.5.14] (Dort ist alles für allgemeine Treppenfunktionen in einer Variablen gemacht. Hier sind die Treppenfunktionen nur die Ober- und Untersummen.)  $\square$

## 1 Integration

Um das Integral  $\int_Q f \, d\text{vol}$  einer integrierbaren Funktion  $f$  auch wirklich ausrechnen zu können, hilft uns der folgende Satz:

**Satz 1.2.7** (Fubini für Quader). *Seien  $I_j = [a_j, b_j]$  für  $j = 1, \dots, n$  und  $n = m + k$ . Sei  $Q_1 = I_1 \times \dots \times I_m$ ,  $Q_2 = I_{m+1} \times \dots \times I_n$ ,  $Q = Q_1 \times Q_2$ . Sei  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int_Q f \, d\text{vol} &= \int_{Q_1} \left( \int_{Q_2} f(x, y) \, d\text{vol}_y \right) d\text{vol}_x = \int_{Q_1} \left( \overline{\int_{Q_2} f(x, y) \, d\text{vol}_y} \right) d\text{vol}_x \\ &= \int_{Q_2} \left( \int_{Q_1} f(x, y) \, d\text{vol}_x \right) d\text{vol}_y = \int_{Q_2} \left( \overline{\int_{Q_1} f(x, y) \, d\text{vol}_x} \right) d\text{vol}_y. \end{aligned}$$

*Insbesondere existieren dann alle Integrale der rechten Seite. Hier haben wir an  $d\text{vol}$  einen Index geschrieben, um zu verdeutlichen bzgl. welcher Koordinaten integriert wird.*

*Beweis.* Es gilt  $Q_{i_1 \dots i_n}^\ell = (Q_1)_{i_1 \dots i_m}^\ell \times (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell$ . Damit haben wir

$$\begin{aligned} S_\ell(f: Q \rightarrow \mathbb{R}) &= \frac{\text{vol } Q}{\ell^n} \sum_{i_1, \dots, i_n} \inf_{(x, y) \in Q_{i_1 \dots i_n}^\ell} f(x, y) \\ &= \frac{\text{vol } Q}{\ell^n} \sum_{i_1, \dots, i_n} \inf_{x \in (Q_1)_{i_1 \dots i_m}^\ell} \left( \inf_{y \in (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} f(x, y) \right) \\ &\leq \frac{\text{vol } Q_1}{\ell^m} \sum_{i_1, \dots, i_m} \inf_{x \in (Q_1)_{i_1 \dots i_m}^\ell} \left( \frac{\text{vol } Q_2}{\ell^{n-m}} \sum_{i_{m+1}, \dots, i_n} \inf_{y \in (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} f(x, y) \right) \\ &= S_\ell(x \in Q_1 \mapsto S_\ell(f(x, \cdot): Q_2 \rightarrow \mathbb{R})) \leq S_\ell(x \in Q_1 \mapsto \int_{Q_2} f(x, y) \, d\text{vol}_y) \\ &\leq S^\ell(x \in Q_1 \mapsto \int_{Q_2} f(x, y) \, d\text{vol}_y) \leq S^\ell(x \in Q_1 \mapsto \overline{\int_{Q_2} f(x, y) \, d\text{vol}_y}) \\ &\leq S^\ell(x \mapsto S^\ell(f(x, \cdot): Q_2 \rightarrow \mathbb{R})) \\ &= \frac{\text{vol } Q_1}{\ell^m} \sum_{i_1, \dots, i_m} \sup_{y \in (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} \left( \frac{\text{vol } Q_2}{\ell^{n-m}} \sum_{i_{m+1}, \dots, i_n} \sup_{x \in (Q_1)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} f(x, y) \right) \\ &\leq \frac{\text{vol } Q}{\ell^n} \sum_{i_1, \dots, i_n} \sup_{y \in (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} \left( \sup_{x \in (Q_1)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} f(x, y) \right) \\ &= \frac{\text{vol } Q}{\ell^n} \sum_{i_1, \dots, i_n} \sup_{(x, y) \in Q_{i_1 \dots i_n}^\ell} f(x, y) = S^\ell(f: Q \rightarrow \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Führt man den Limes  $\ell \rightarrow \infty$  aus und benutzt die Integrierbarkeit von  $f$  erhält man hier dann eine Kette von Gleichungen, in der uns die blauen Terme interessieren, was

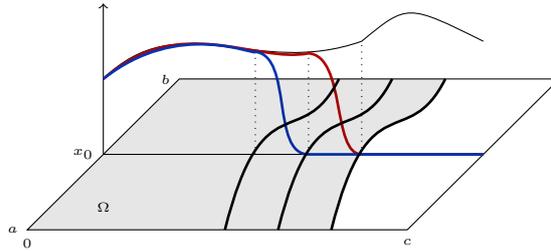


Abbildung 1.5: Zum Beweis von Lemma 1.2.9: Für  $Q_1 = [a, b]$  und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g \geq 0$ , und  $f: \Omega := \{(x, y) \in Q := Q_1 \times [0, \sup g] \mid y \leq g(x)\} \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$ , stetig ist der Schnitt  $f(x_0, \cdot)$  und  $f_\epsilon(x_0, \cdot)$  für zwei verschiedene  $\epsilon$  dargestellt.

dann ergibt:

$$\int_Q f \, d\text{vol} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} S_\ell \left( \int_{Q_2} f(\cdot, y) \, d\text{vol}_y \right) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} S^\ell \left( \int_{Q_2} f(\cdot, y) \, d\text{vol}_y \right).$$

So erhalten wir die erste Gleichung der Behauptung und damit insbesondere, dass die zugehörigen Integrale existieren. Die zweite Zeile erhält man analog, da man in der obigen Kette im dritten blauen Ausdruck auch durch  $S_\ell$  vom oberen Integral über  $Q_2$  ersetzen kann. Die zweite Zeile der Gleichung erhält man analog, indem man die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht.  $\square$

**Beispiel 1.2.8.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \geq 0$  stetig und sei  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$  die Menge, die die Funktion mit der  $x$ -Achse einschließt. Sei  $c > \max f$ . Wir betrachten  $1_\Omega: Q = [a, b] \times [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir könnten durch direktes Abschätzen der Ober- und Untersumme abschätzen, dass  $1_\Omega$  integrierbar ist. Das schieben wir kurz auf und nehmen das hier mal direkt an:

Da die Funktion integrierbar (bis jetzt nur angenommen, im Lemma unten gezeigt) ist, können wir Fubini anwenden und erhalten

$$\text{vol } \Omega = \int_Q 1_\Omega \, d\text{vol} = \int_{[a,b]} \left( \int_{[0,c]} 1_\Omega(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^{f(x)} dy \right) dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Unser Begriff von Volumen hier, ist also mit dem Flächeninhaltsbegriff aus Analysis 1 unter einer Funktion kompatibel.

Als nächstes sehen wir, dass  $1_\Omega$  mit dem  $\Omega$  des letzten Beispiels wirklich integrierbar ist. Allgemeiner gilt sogar

**Vorl. 4**

**Lemma 1.2.9.** Sei  $Q_1 \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader und  $g: Q_1 \rightarrow \mathbb{R}, g \geq 0$  stetig. Sei  $c > \sup g$ . Sei  $\Omega_g := \{(x, y) \in Q := Q_1 \times [0, c] \mid y \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $\tilde{f} = 1_{\Omega_g} f$  - also

$$\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in \Omega_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 1 Integration

Dann ist  $\tilde{f}$  integrierbar.

Wir nennen dann auch  $f: \Omega_g \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und setzen

$$\int_{\Omega_g} f \, d\text{vol} := \int_Q \tilde{f} \, d\text{vol}.$$

$\tilde{f}$  ist die Fortsetzung von  $f$  durch Null auf  $Q \setminus \Omega_g$  und damit i.A. nicht mehr stetig. Deshalb müssen wir die Integrierbarkeit hier extra zeigen. Außerdem hängt  $\int_{\Omega} f \, d\text{vol}$  nicht von der Wahl von  $c$  ab, solange  $c > \sup g$  ist.

*Beweis.* Idee: Wäre  $\tilde{f}$  stetig auf  $Q$ , wüssten wir nach Satz 1.2.6 schon die Behauptung. Das ist aber nur der Fall, wenn  $f|_{\partial\Omega_g} = 0$  ist, was i.A. nicht wahr sein wird. Was wir aber auch wissen: Dadurch, dass  $\tilde{f}$  beschränkt ist, existiert das obere und untere Integral. Wir brauchen nur noch, dass beide übereinstimmen.

Dafür wollen wir  $\tilde{f}$  geeignet durch stetige Funktionen approximieren: Sei  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  glatt mit  $\varphi(z) = 1$  für  $z \leq 0$ , monoton und  $\varphi(z) = 0$  für  $z \geq 1$ . Wir setzen  $f_\epsilon: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \in Q_1 \times [0, c] \mapsto f(x, y)\varphi(\frac{y-g(x)+\epsilon}{\epsilon})$ , vgl. Abbildung 1.5.

Wir wollen dies nun verwenden um zu zeigen, dass  $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist:

$$|S_k(\tilde{f}) - S_k(f_\epsilon)| \leq \text{vol}_n Q_1 2\epsilon 2 \sup_{\Omega} |f|.$$

Dabei folgt das  $\leq$ , da  $\tilde{f} - f_\epsilon$  nur auf  $\Omega_g \setminus \Omega_{g-\epsilon}$  überhaupt ungleich Null sein kann und dieser Bereich durch Teilquader überdeckt wird, deren Volumen zusammen höchstens  $2\epsilon \cdot \text{vol}_n Q_1 \frac{c}{k}$  ergeben. Analog für die Obersummen. Somit ist

$$\begin{aligned} |S_k(\tilde{f}) - S^k(\tilde{f})| &\leq |S_k(\tilde{f}) - S_k(f_\epsilon)| + |S^k(\tilde{f}) - S^k(f_\epsilon)| + \underbrace{|S_k(f_\epsilon) - S^k(f_\epsilon)|}_{=: \delta_k(\epsilon)} \\ &\leq 8\text{vol}_n Q_1 \epsilon \sup_{\Omega} |f| + \delta_k(\epsilon) \end{aligned}$$

Da die  $f_\epsilon$  stetig und integrierbar sind, geht  $\delta_k(\epsilon)$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen Null. Lässt man nun zuerst  $k \rightarrow \infty$  und dann  $\epsilon \rightarrow 0$  gehen, folgt, dass  $\tilde{f}$  integrierbar ist. (Aus obigem folgt auch direkt, dass auch wirklich  $\int_Q \tilde{f} \, d\text{vol} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_Q f_\epsilon \, d\text{vol}$  ist.)  $\square$

**Beispiel 1.2.10.** Aus dem letzten Lemma folgt wegen Linearität auch, dass stetige Funktionen auf dem Bereich zwischen den Funktionsgraphen stetiger Funktionen  $g_1, g_2: Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_1 \geq g_2$  - also

$$\Omega := \{(x, y) \in Q \times [c = \inf g_2, d = \sup g_1] \mid g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$$

- integrierbar sind. Denn dann ist  $f|_{\Omega} = f|_{\Omega_1} - f|_{\Omega_2}$ . Mit Fubini erhalten wir dann

$$\int_{\Omega} f \, d\text{vol} = \int_{Q_1} \int_c^d f(x, y) 1_{\Omega}(x, y) \, dy \, d\text{vol}_x = \int_{Q_1} \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x, y) \, dy \, d\text{vol}_x.$$

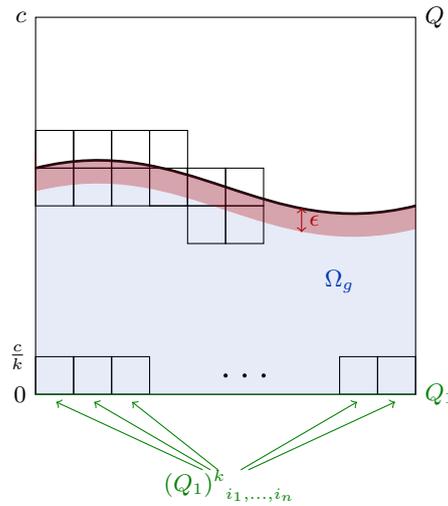


Abbildung 1.6: Zum Beweis von Lemma 1.2.9: Der rote Teilbereich ist der Bereich, wo  $\tilde{f}$  und  $f_\epsilon$  sich unterscheiden. Dieser wird durch  $\max. 2\epsilon \frac{k}{c} \cdot$  (Anzahl der  $(Q_1)^k -$  Teilquader) überdeckt. Damit ist deren Volumen  $\leq 2\epsilon \text{vol}_n Q_1$ .

Berechnen wir damit nun einmal den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius  $r$ . Dann können wir  $g_{1/2}: x \in [-r, r] \mapsto \pm\sqrt{r^2 - x^2} \in \mathbb{R}$  benutzen und erhalten

$$\text{vol } B_r(0) = \int_{\Omega} \text{dvol} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy dx = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2-x^2} dx = \pi r^2.$$

Der Ausdruck vorm letzten Gleichheitszeichen ist genau der zweimal dem Flächeninhalt unter der Funktion  $x \in [-r, r] \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ , was dem oberen Halbkreis entspricht – passt also mit der Flächenberechnung wie in Analysis 1 zusammen. Für die Berechnung des letzten Integrals substituiert man  $x = r \sin \varphi$ , vgl. [1, Bsp. 4.5.22].

**Beispiel 1.2.11.** Wir wollen den Flächeninhalt im Bereich  $\Omega$  zwischen den Funktionen  $y = x$  und  $y = x^3$  bestimmen, vgl. Abbildung. Dieser Flächeninhalt ist (wie in Analysis 1 gemacht)  $\text{vol } \Omega = \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4}$ .

1 Integration

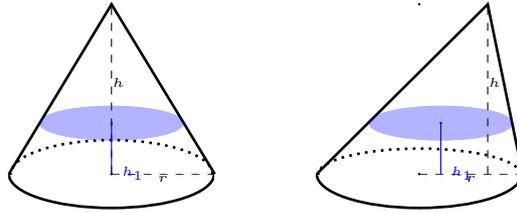
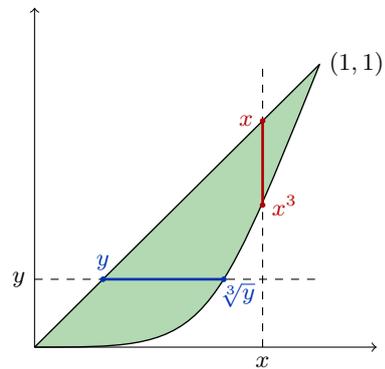


Abbildung 1.7: Prinzip des Cavalieri: Haben für zwei Körper mit gleicher Höhe für alle  $h_1 \in (0, h)$  die Querschnittsflächen den gleichen Flächeninhalt, dann haben die Körper das gleiche Volumen.

Aber wir wollen den Flächeninhalt nun mittels Fubini berechnen und zwar auf verschiedene Arten (unterschiedliche Integrationsreihenfolge):

Es ist  $\text{vol } \Omega = \int_{[0,1]^2} 1_\Omega \, d\text{vol}$ . Nach Fubini ist dies gleich  $\int_0^1 \int_0^1 1_\Omega(x, y) \, dx \, dy$  und auch gleich  $\int_0^1 \int_0^1 1_\Omega(x, y) \, dy \, dx$ . Betrachten wir zunächst  $\int_0^1 \int_0^1 1_\Omega(x, y) \, dx \, dy$  und dort das innere Integral für festes  $y \in [0, 1]$ . Dann ist  $1_\Omega(x, y)$  für  $x \in [y, \sqrt[3]{y}]$  gleich 1 und sonst Null. Es ist also



$$\int_0^1 \int_0^1 1_\Omega(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_y^{\sqrt[3]{y}} dx \right) dy = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - y) \, dy = \frac{1}{4}.$$

Analog ist

$$\int_0^1 \int_0^1 1_\Omega(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left( \int_{x^3}^x dy \right) dx = \int_0^1 (x - x^3) \, dx = \frac{1}{4}.$$

Eine weitere direkte Anwendung von Fubini ist das Prinzip des Cavalieri:

**Satz 1.2.12** (Prinzip von Cavalieri, vgl. Abb. 1.7). *Seien  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2$ , beschränkt und so dass  $1_{\Omega_i} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar sind. Für  $h \in \mathbb{R}$  fassen wir  $\Omega_{i,h} := \Omega_i \cap \{x_n = h\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n = h\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Sei nun für alle  $h \in \mathbb{R}$  die Funktion  $1_{\Omega_{i,h}} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Setze  $\text{vol}_{n-1} \Omega_{i,h} := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\Omega_{i,h}} \, d\text{vol}$  (vgl. Bemerkung 1.2.4). Sei  $\text{vol}_{n-1} \Omega_{1,h} = \text{vol}_{n-1} \Omega_{2,h}$  für alle  $h \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\text{vol } \Omega_1 = \text{vol } \Omega_2$ .*

Beweis. ÜA 14

□

**Beispiel 1.2.13.** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, Jordan-messbare Teilmenge. Sei  $(p, H) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ . Die Menge

$$\Omega := \{t(p, H) + (1-t)(p-x, 0) \mid t \in [0, 1], x \in G\}$$

beschreibt einen Kegel mit Grundfläche  $G$  und Spitze in  $(p, h)$ . Dann ist  $\Omega_h := \Omega \cap \{x_n = h\}$  leer für  $h \notin [0, H]$  und sonst ist  $\Omega_{tH} = \{tp + (1-t)(p-x) \mid x \in G\} = p + (1-t)G$  für  $t \in [0, 1]$ , vgl. Bemerkung 1.2.4. Insbesondere ist damit  $\text{vol}_n \Omega_{tH} = (1-t)^n \text{vol}_n G$ . Es hängt also nur von  $h, H$  und  $\text{vol}_n G$  ab. Nach dem Prinzip des Cavalieri ist damit das Volumen unabhängig von  $p$ , also der 'Schiefe' des Kegels. Insbesondere haben wir also, dass die beiden Kegel in Abbildung 1.7 gleiches Volumen haben.

Mit dem Satz von Fubini können wir dieses Volumen auch direkt berechnen. Sei  $G$  in einem achsenparallelen Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  enthalten. Sei  $Q$  groß genug, dann ist  $\Omega \subset Q \times [0, H]$  und damit nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \text{vol } \Omega &= \int_{Q \times [0, H]} 1_\Omega = \int_0^H \left( \int_Q 1_{\Omega_h} \, d\text{vol} \right) dh = \int_0^H \text{vol}_n \Omega_h \, dh \\ &= \int_0^H \left(1 - \frac{h}{H}\right)^n \text{vol}_n G \, dh = -\frac{H}{n+1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{n+1} \Big|_0^H \text{vol}_n G \\ &= \frac{H}{n+1} \text{vol}_n G \end{aligned}$$

(Spezialfall  $n = 3$ :  $\frac{1}{3}H \text{vol}_2 G$  – kennt man z.B. von Kegeln und Pyramiden.)

## 1.2.2 Divergenz

Funktionen  $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  werden oft als *Vektorfelder* interpretiert, vgl. Abbildung 1.8.

Sei  $V$  partiell differenzierbar. Die *Divergenz eines Vektorfeldes*  $V = (V_1, \dots, V_n)^T$  in  $p \in \Omega$  ist definiert als

$$\text{div } V(p) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(p).$$

Damit ist  $\text{div } V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Was misst die Divergenz?

Die Divergenz misst die Netto-Quellen/Senkendichte des Vektorfeldes. Was soll das heißen? Integriert man die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes über ein Gebiet, z.B. einen Quader, dann ist das Ergebnis gleich dem Integral über den Rand des Gebietes des Anteils des Vektorfeldes, der senkrecht zum Rand steht, vgl. Abbildung 1.9:

## 1 Integration

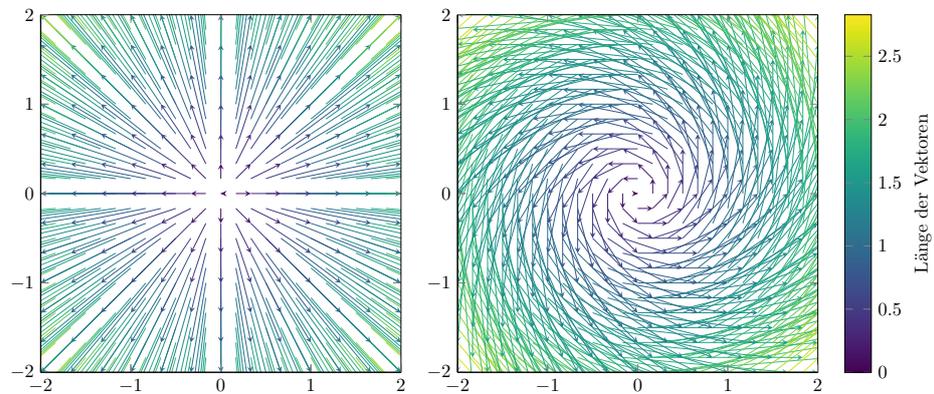


Abbildung 1.8: Links: Das Vektorfeld  $V(x, y) = (x, y)^T$ ,  $\operatorname{div} V = 2$ ,  $\operatorname{rot} V = 0$ .  
Rechts: Vektorfeld  $V(x, y) = (-y, x)^T$ ,  $\operatorname{div} V = 0$ ,  $\operatorname{rot} V = 2$ .

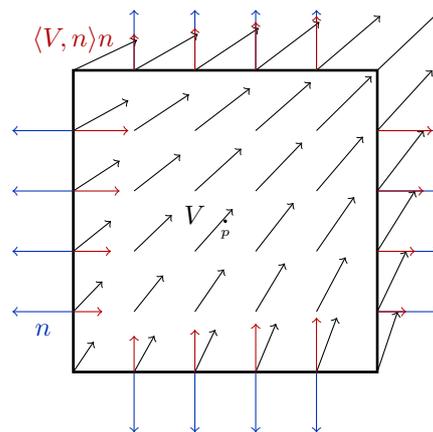


Abbildung 1.9: Die blauen Vektoren sind äußere Einheitsnormalenvektoren auf dem Rand des Quadrates. Die roten Vektoren repräsentieren  $\langle V, n \rangle n$ , D.h. der Betrag von  $\langle V, n \rangle$  ist die Länge der Projektion von  $V$  auf  $n$  und das zugehörige Vorzeichen gibt an, ob der Vektor  $\langle V, n \rangle n$  in die gleiche oder in die entgegengesetzte Richtung wie  $n$  zeigt.  $\int_{\text{Rand}} \langle V, n \rangle$  misst also, ob in der Summe mehr ins Quadrat hinfließt als rausfließt. Wenn ja, gibt es innerhalb des Quadrats eine Senke. Falls es umgekehrt ist, dann gibt es eine Quelle.

**Lemma 1.2.14** (Divergenzsatz auf Quadern). Sei  $V: Q \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei  $n$  in jedem Punkt des Randes\* der äußere Einheitsnormalenvektor auf dem Quader. Dann gilt

$$\int_Q \operatorname{div} V \, \operatorname{dvol} = \int_{\partial Q} \langle V, n \rangle \, \operatorname{dvol}.$$

*Beweis.* Wir benutzen Fubini und rechnen mittels Hauptsatz aus Analysis 1 direkt nach (wir lassen die  $dx_i$  für die Kürze weg und ein  $\checkmark$  über einem Ausdruck bedeutet, dass dieser Term nicht vorkommt):

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} \langle V, n \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_i}^{\checkmark b_i} \dots \int_{a_m}^{b_m} V_i(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_i}^{\checkmark b_i} \dots \int_{a_m}^{b_m} V_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_i}^{\checkmark b_i} \dots \int_{a_m}^{b_m} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} \operatorname{div} V \, dx_m \dots dx_1 \quad \square \end{aligned}$$

Aus diesem Satz erhält man im Limes die Interpretation der Divergenz des Vektorfeldes in einem Punkt als:

$$\operatorname{div} V(0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Volumen} \operatorname{Quader} (= (2a)^m)} \int_{\operatorname{Rand} \operatorname{des} \operatorname{Quaders} [-a, a]^m} \langle V, n \rangle.$$

Noch mal zu Abbildung 1.8: Für das Vektorfeld  $V(x, y) = (x, y)^T$  ist die Divergenz konstant positiv – jeder Punkt ist Netto eine Quelle. Das sieht man am Bild sehr gut in der Null, weil dort  $V$  selbst Null ist. In jedem anderen Punkt  $(x_0, y_0)$  würde man genau das gleiche Bild, wenn man von  $V$  das konstante Vektorfeld  $(x_0, y_0)^T$  abzieht, was nichts an der Divergenz ändert.

Das Vektorfeld  $V(x, y) = (-y, x)^T$  ist divergenzfrei, hat also keine Quellen und Senken. Im Ursprung sieht man das wieder sehr gut, da sich das Vektorfeld um den Ursprung dreht. In jedem anderen Punkt  $(x_0, y_0)$  erhält man wieder das gleiche Bild, wenn man wieder von  $V$  das konstante Vektorfeld  $(-y_0, x_0)^T$  abzieht.

Vom Divergenzsatz werden wir später noch allgemeinere Versionen sehen, wo nicht mehr nur über einen Quader integriert werden kann.

---

\*Mit Rand  $\partial Q$  ist hier gemeint: Wir zerlegen den Rand in die einzelnen Randquader als offene Quader (also ohne deren Rand) und betrachten davon die disjunkte Vereinigung. Die Betrachtung der Randquader als offene Quader machen wir einmal, damit klar ist, was jeweils  $n$  sein soll. Wo die Ränder zweier Randquader zusammenstoßen, gibt es sonst mehr als eine Wahl. Außerdem hilft das beim  $\int_{\partial Q}$  – dann müssen wir uns keine Gedanken machen zu welchem Integralanteil die Punkte im Schnitt zweier Randquader gehören sollen (machen am Ende sowieso keinen Beitrag zum Integral. Damit  $\int_{\partial Q}$  die Summe über die Integrale der einzelnen Randquader sein. Sei  $n: \partial Q \rightarrow \mathbb{R}^m$  der äußere Einheitsnormalenvektor des Quaders –  $n$  auf  $Q \cap \{x_i = b_i\}$  ist  $e_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor und  $-e_i$  auf  $Q \cap \{x_i = a_i\}$ , vgl. Abbildung 1.9.

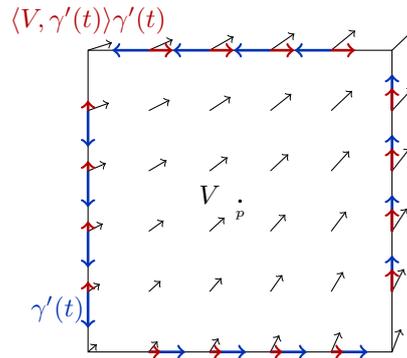


Abbildung 1.10:  $\gamma$  parametrisiere den Rand des Quadrates in mathematisch positiver (= entgegen des Uhrzeigersinns) Drehrichtung. Dann misst  $\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  den Anteil von  $V$  in Richtung des Randes. Das Integral darüber misst, ob sich in der Summe  $V$  um das Quadrat dreht.

### 1.2.3 Rotation

Den Begriff der Rotation gibt es für Vektorfelder in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ . Wir beginnen mit  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  partiell differenzierbar. Seien  $(x, y)$  die Koordinaten im  $\mathbb{R}^2$ . Die *Rotation* von  $V = (V_x, V_y)^T$  in  $p$  ist definiert als

$$\text{rot}V(p) = \partial_x V_y(p) - \partial_y V_x(p).$$

Vgl. Abbildung 1.8.

#### Was misst die Rotation in 2D?

In ÜA 13 rechnen wir nach, vgl. Abbildung 1.10:

**Lemma 1.2.15.** *Sei  $Q \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck und  $V: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar. Wird der Rand des Rechtecks mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  entgegen des Uhrzeigersinns durchlaufen, dann ist*

$$\int_Q \text{rot}V \, \text{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds.$$

Was sagt uns das? Hier misst  $\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  (der Integrand des Kurvenintegrals auf der rechten Seite) den Anteil von  $V$  in Richtung des Randes. Das Integral über  $\gamma$ , also das Kurvenintegral insgesamt, mittelt. D.h. wir messen, ob im Mittel sich das Vektorfeld um den Rand dreht, vgl. Abbildung 1.10.

Auch vom letztem Lemma werden wir noch allgemeinere Versionen sehen, wo nicht mehr nur über ein Quadrat integriert wird.

Kommen wir nun zum dreidimensionalen Fall:

Sei  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  partiell differenzierbar. Seien  $(x, y, z)$  die Koordinaten im  $\mathbb{R}^3$ . Die Rotation von  $V = (V_x, V_y, V_z)^T$  in  $p$  ist definiert als

$$\operatorname{rot}V(p) = \begin{pmatrix} \partial_y V_z - \partial_z V_y \\ \partial_z V_x - \partial_x V_z \\ \partial_x V_y - \partial_y V_x \end{pmatrix} (p).$$

### Was misst die Rotation in 3D?

Die 1. Komponente der Rotation misst inwieweit sich das Vektorfeld in der  $y, z$ -Ebene um den betrachteten Punkt dreht – also inwieweit sich das Vektorfeld um die  $x$ -Achse durch diesen Punkt dreht. Analog für die anderen Komponenten. Insgesamt ist  $\operatorname{rot}V(p)$  ein Vektor, dessen Länge und Richtung die Stärke und Achse der maximalen Rotation abbildet.

Direktes Einsetzen und Nachrechnen liefert folgenden Zusammenhang:

**Lemma 1.2.16.** Seien  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} V = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0.$$

### Wo kommt die Rotation z.B. vor?

- (i) Rotation in zwei Dimensionen wird oft in der Meteorologie verwendet – für die Rotation von Luftbewegungen. Zwar ist Wind in Wirklichkeit ein dreidimensionales Vektorfeld. Aber für viele Fragen ist erst einmal die Ebene parallel zur Erdoberfläche relevant.
- (ii) Die Maxwell-Gleichungen sind die grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik. Sie beschreiben die Wirkung eines elektromagnetischen Feldes auf elektrische Ladungen und die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld  $E$  und dem Magnetfeld  $B$ . Das elektrische Feld  $E$ , das Magnetfeld  $B$  ist definiert auf einem (nicht notwendigerweise beschränktem) Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Beide Größen sind zeitabhängig, d.h.  $E: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $B: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Weiterhin wird die elektrische Ladung durch eine zeitabhängige Dichtefunktion  $\rho: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und die Stromverteilung durch den zeitabhängigen Stromdichtevektor  $j: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschrieben.  $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit. Es gelten die Maxwellgleichungen (hier sind  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  Naturkonstanten), vgl. Tabelle 1.11. Dies sind gewöhnliche Differentialgleichung, aber mit Mehrfachintegralen und solchen Integralsätzen wie Lemmata 1.2.14 und 1.2.15 kann man daraus physikalische Gesetze ableiten, die dann über Kurvenintegrale und Oberflächenintegrale formuliert sind – dazu später noch mehr.

## 1.2.4 Schwerpunkte und andere Anwendungen

Bis jetzt haben wir Mehrfachintegrale vor allem genutzt um Volumina auszurechnen – also der Spezialfall  $\int_{\Omega} 1 \, d\operatorname{vol}$ . Aber auch Integrale der Form  $\int_{\Omega} f \, d\operatorname{vol}$  kommen in Anwendungen oft vor. Wir schauen uns einige Beispiele an:

\*Für das Minuszeichen siehe Lenzsche Regel – [https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche\\_Regel](https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche_Regel).

## 1 Integration

Gauß'sches Gesetz	$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes
Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder	$\operatorname{div} B = 0$	Das Magnetfeld ist quellenfrei. = keine magnetischen Monopole
Induktionsgesetz (Faraday Gesetz)	$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	Änderungen der magnetischen Flussdichte erzeugen ein elektrisches Wirbelfeld*
Ampèresches Gesetz	$\operatorname{rot} B = \mu_0(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$	Elektrische Ströme und zeitl. Änderungen des elektr. Feldes (= Verschiebungsströme) ergeben ein magn. Wirbelfeld.

Abbildung 1.11: Maxwellgleichungen

### Schwerpunkte 1D-Fall:

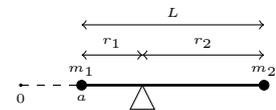
Schwerpunkt zweier Punktmassen ( $m_1$  in  $a$  und  $m_2$  in  $b = a + L$ ):

Im Schwerpunkt ( $s = a + r_1$ ) gilt nach Hebelgesetz  $m_1 r_1 = m_2 r_2$ .

Also ist  $s = \frac{am_1 + bm_2}{m_1 + m_2}$ .

Analog ist der Schwerpunkt von endlich vielen Punktmassen  $m_i$  im Ort  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist dann in  $\frac{\sum_i m_i a_i}{\sum_i m_i}$ .

Hat man nun einen Stab in  $[a, b = a + L]$  und ist  $m(x)$  die Masse des Teilstabes  $[a, x]$ . Dann nennt man  $\rho(x) = m'(x)$  die Massendichte. D.h. andersherum: Hat man eine Dichte  $\rho(x)$  gegeben dann ist  $M := \int_a^b \rho(x) dx$  die Gesamtmasse des Stabes. Betrachtet man nun den Stab in  $n$  Intervalle der gleichen Länge unterteilt und ersetzt jedes Intervall durch eine Punktmasse am linken Ende dieses Teilintervalls und mit der Masse dieses Teilintervall, dann enthält man durch obige Prozedur eine Approximation für den Schwerpunkt des Stabes:



Ist  $M$  die Gesamtmasse des Stabes, dann ist der Schwerpunkt der  $n$ .ten Approximation:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( a + \frac{b-a}{n}(i-1) \right)}_{\text{linkes Ende des Teilintervalls}} \underbrace{\left( \int_{a+\frac{b-a}{n}(i-1)}^{a+\frac{b-a}{n}i} \rho(x) dx \right)}_{\text{Masse des Teilintervalls}}.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht dies gegen  $\frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx$ , was wir nun als Definition des Schwerpunktes einer eindimensionalen Masseverteilung nehmen.

**Schwerpunkte nD-Fall:**

Man bestimmt im Prinzip den Schwerpunkt in jeder Koordinate einzeln. Sei  $\rho: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Dichte/Masseverteilung eines Körpers  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$S_i := i\text{-te Koordinate des Schwerpunktes} = \frac{\int_{\Omega} x_i \rho(x) d\text{vol}}{\int_{\Omega} \rho d\text{vol}}$$

Ist keine Massenverteilung  $\rho$  angegeben, meint man immer  $\rho = 1_{\Omega}$ .

**Beispiel 1.2.17.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Jordan-messbar und für  $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  gelte  $f(\Omega) = \Omega$ . Dann ist 0 die  $x_1$ -Koordinate des Schwerpunktes von  $\Omega$ . (Analog gilt dies dann auch für Spiegelung anderer Koordinaten):

Sei  $\Omega_h := \Omega \cap \{x_1 = h\}$ . Dann sind  $\Omega_h$  und  $\Omega_{-h}$  aufgefasst als Teilmengen in  $\mathbb{R}^{n-1}$  gleich und haben damit insbesondere das gleiche  $(n-1)$ -dimensionale Volumen. Damit gilt nach Fubini

$$\int_{\Omega} x_1 d\text{vol} = \int_{\mathbb{R}} x_1 \text{vol}_{n-1} \Omega_{x_1} dx_1 = \int_0^{\infty} x_1 \text{vol}_{n-1} \Omega_{x_1} dx_1 - \int_0^{\infty} x_1 \text{vol}_{n-1} \Omega_{-x_1} dx_1 = 0.$$

Damit ist der Schwerpunkt einer (Voll-)Kugel ihr Mittelpunkt.

Für den Schwerpunkt der oberen Halb(voll)kugel mit Mittelpunkt im Ursprung folgt damit analog, dass die  $x$  und  $y$  Koordinate des Schwerpunktes gleich 0 ist. Die  $z$ -Koordinate des Schwerpunkt muss man extra mittels  $\int_{\text{Halbkugel}} z d\text{vol}$  berechnen, ÜA 17.ii.

**Trägheitsmomente**

Bei der Bewegung eines starren Körpers  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , die einen Rotationsanteil hat, ist das Trägheitsmoment dieses Körpers eine wichtige Größe. Sie gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse an. Misst  $r_{\perp}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  den Abstand eines Punktes zur Rotationsachse und  $\rho$  die Massenverteilung des Körpers, dann ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$J := \int_{\Omega} r_{\perp}^2 \rho d\text{vol}.$$

(Diese Größe kommt z.B. in der Rotationsenergie  $E = \frac{1}{2} J \omega^2$  ( $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit).

## 1 Integration

**Beispiel 1.2.18.** Sei  $\Omega = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$  mit konstanter Massenverteilung. Wir wollen das Trägheitsmoment um die  $z$ -Achse bestimmen:

$$\begin{aligned} J_z &= \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\text{vol} = \int_{-c}^c \int_{-b}^b \int_{-a}^a (x^2 + y^2) dx dy dz = 2c \int_{-b}^b \left( \frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right) \Big|_{-a}^a dx \\ &= \frac{8bc}{3} a^3 + 4ac \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-b}^b = \frac{1}{3} (a^2 + b^2) \text{vol } \Omega \end{aligned}$$

### Stochastik

Sind  $X_i: \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho_{X_1, \dots, X_n}: \Omega := \prod_{i=1}^n \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Tupel  $(X_1, \dots, X_n)$  einen Wert in  $A \subset \Omega$  annimmt, ist  $\int_A \rho_{X_1, \dots, X_n} d\text{vol}$  (damit ist insbesondere  $\int_{\Omega} \rho_{X_1, \dots, X_n} d\text{vol} = 1$ ).

Sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen  $f(X_1, \dots, X_n)$  gleich

$$E(f(X_1, \dots, X_n)) := \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) \rho_{X_1, \dots, X_n} d\text{vol}$$

Insbesondere ist damit der Erwartungswert von  $X_i$  gleich

$$E(X_i) = \int_{\Omega} x_i \rho_{X_1, \dots, X_n} d\text{vol}$$

und damit gleich der  $i$ -ten Koordinate des Schwerpunkts von  $\Omega$  mit Massenverteilung  $\rho_{X_1, \dots, X_n}$ .

## 1.3 Untermannigfaltigkeiten

Sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z)^T \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Dann ist  $f^{-1}(0) = S^2$  die Sphäre vom Radius 1. Es ist  $D_{(x_0, y_0, z_0)} f = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ . Für  $z_0 \neq 0$  ist  $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \neq 0$ . Also gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen in einer offenen Umgebung von  $(x_0, y_0, z_0)$  eine Auflösung von  $f(x, y, z) = 0$  nach  $z$ , also  $z = z(x, y)$ . Hier brauchen wir natürlich diesen abstrakten Satz nicht, sondern können direkt ausrechnen:  $z(x, y) = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , wobei  $\pm$  das Vorzeichen von  $z_0$  ist. Der maximale Definitionsbereich ist hier gegeben durch  $z: B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Man kann  $z$  nun als eine Karte der Sphäre/Erdoberfläche verstehen – so wie wir sie in Atlanten finden.

In einer offenen Umgebung von Punkten mit  $z_0 = 0$  können wir aber entweder nach  $x$  oder nach  $y$  auflösen, da  $x_0, y_0, z_0$  nicht gleichzeitig Null sein können, das sie einen Punkt auf der Sphäre ergeben.

Wir haben also insgesamt gesehen, dass für den Fall der Sphäre, es um jeden Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  eine offene Umgebung gibt, so dass  $f$  nach mindestens einer Variable auflösbar ist und wir so eine Karte um jeden Punkt der Sphäre finden – also einen Atlas für die gesamte Erde. Diese Interpretation wird im Begriff der Untermannigfaltigkeit zusammengefasst, vgl. auch Abbildung 1.13:

### 1.3 Untermannigfaltigkeiten

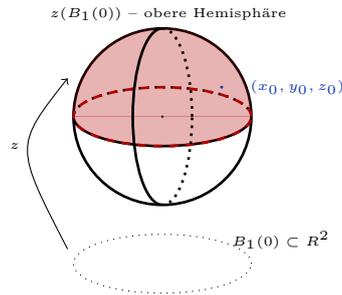


Abbildung 1.12: Für  $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$  mit  $z_0 > 0$  kann die definierende Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  nach  $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  mit Definitionsbereich  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$  aufgelöst werden. Der Graph  $(x, y, z(x, y))$  ist dann die obere Hemisphäre.

**Definition 1.3.1.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $m \leq n$ . Dann heißt  $M$  *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von  $\mathbb{R}^n$ , falls für jedes  $p \in M$  (ggf. nach Vertauschen der Koordinatenreihenfolge) eine offene Umgebung  $\hat{V} \times \hat{W} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$  von  $p$  und eine glatte Abbildung  $g: \hat{V} \rightarrow \hat{W}$  existiert, so dass

$$\forall (u, w) \in \hat{V} \times \hat{W}: (u, w) \in M \iff g(u) = w, \quad (1.1)$$

anders formuliert

$$M \cap (\hat{V} \times \hat{W}) = \text{graph}(g).$$

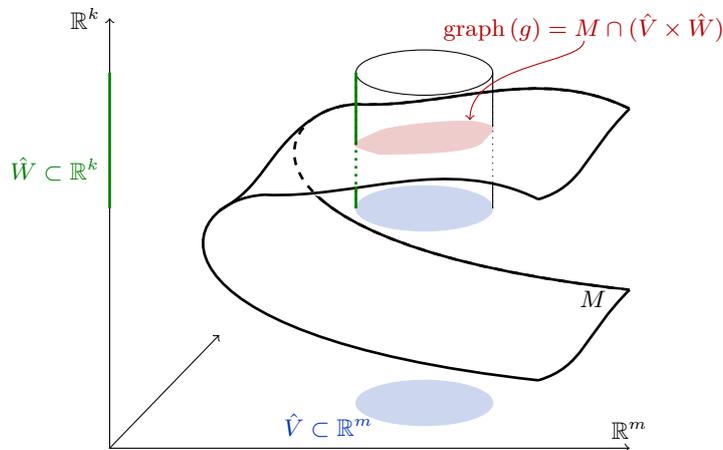


Abbildung 1.13: Untermannigfaltigkeiten sind lokal Funktionsgraphen

## 1 Integration

**Beispiel 1.3.2.** (Beispiele für Untermannigfaltigkeiten)

- (i) Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen und sei  $f: u = (u_1, \dots, u_m) \in U \rightarrow f(u) = f(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^k$  glatt. Dann ist der Funktionsgraph  $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n=m+k} \mid u \in U\}$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit vom  $\mathbb{R}^{n=m+k}$ : Man kann hier in der Definition einfach immer die gleiche offene Umgebung  $U \times \mathbb{R}^k$  als  $\hat{V} \times \hat{W}$  nehmen.
- (ii)  $S^1 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ : Sei  $p = (0, 1)$ . Das ist wie bei der Sphäre vom Anfang.

$$g: \hat{V} := (-1, 1) \rightarrow (0, \infty) = \hat{W}, \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

Dann ist  $\text{graph}(g) = S^1 \cap \{(x, y) \mid y > 0\}$ .

Analog erhält man mittels

$$g_-: (-1, 1) \rightarrow (-\infty, 0), x \mapsto -\sqrt{1 - x^2},$$

$S^1 \cap \{(x, y)^T \mid y < 0\} = \text{graph}(g_-)$ . Damit haben wir schon um alle Punkte in  $S^1 \setminus \{(-1, 0)^T, (1, 0)^T\}$  gesehen, dass der Kreis dort lokal ein Funktionsgraph ist.

Für die beiden verbleibenden Punkte ist  $S^1$  selbst lokal kein Graph über  $x$  - aber über  $y$ : Vertauschen wir also die Rollen von  $x$  und  $y$  erhalten wir  $S^1$  ist nahe  $(\pm 1, 0)^T$  gleich dem Funktionsgraphen von  $y \mapsto \pm\sqrt{1 - y^2}$ .

- (iii) Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist  $W \cap M$ , sofern nicht-leer, eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ : Sieht man direkt durch Einschränken des Definitionsbereiches von  $g$ .
- (iv) Sei  $c: I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetig differenzierbare Kurve und sei  $c'(t) \neq 0 = (0, 0)^T$  für alle  $t \in (a, b)$ . Dann gibt es für alle  $t_0 \in (a, b)$  ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $\text{Bild}c|_{[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]}$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist:

Sei  $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ . O.B.d.A sei  $c'_1(t_0) \neq 0$  (Ansonsten muss  $c'_2(t_0) \neq 0$  sein und wir vertauschen die Rolle der zwei Koordinaten). Dann wählen wir  $\epsilon > 0$ , so dass  $c'_1(t)$  für alle  $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  ungleich Null ist. Das geht, da  $c'$  stetig ist. Damit ist  $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \mapsto c_1(t)$  monoton und stetig differenzierbar und damit bijektiv und umkehrbar mit Umkehrfunktion  $t: x_1 \in J \mapsto t(x_1)$  (also  $c_1(t(x_1)) = x_1$ ). Damit ist  $g(x_1 \in J) = c_2(t(x_1))$  die gesuchte Funktion mit  $\text{graph}(g) = c|_{[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]}$ , vgl. Abbildung 1.14 links.

Trotzdem muss das Bild von  $c$  insgesamt keine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  sein (In der Definition muss man 'lokal ein Funktionsgraph' in einer Umgebung von  $c(t_0) \in \mathbb{R}^2$  überprüfen und nicht nur in einer Umgebung von  $t_0$ ). Was kann passieren?  $c$  kann nicht injektiv sein, vgl. Abbildung 1.14 links. Aber auch Injektivität muss nicht ausreichen, vgl. Abbildung 1.14 rechts.

Um herauszufinden, ob eine Menge eine Untermannigfaltigkeit ist, gibt es verschiedene äquivalente Kriterien. Ein sehr wichtiges ist das Kriterium des regulären Wertes:

### 1.3 Untermannigfaltigkeiten

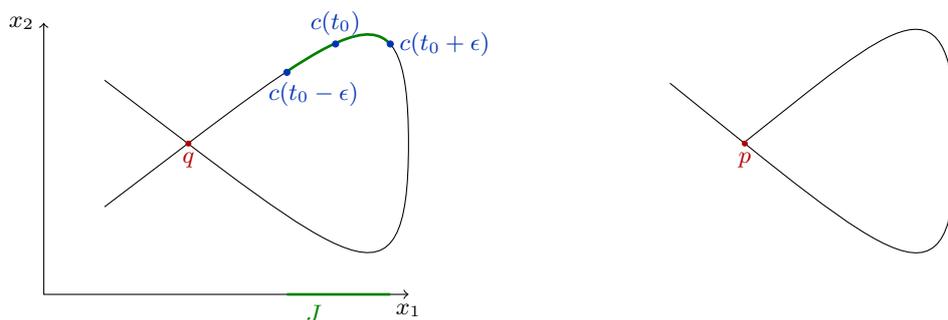


Abbildung 1.14: Beide Bilder seien die Spur (das Bild) einer stetig differenzierbare Kurve  $c: I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Links ist  $c$  nicht injektiv, aber das Bild von  $c$  ohne  $q$  ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Rechts ist  $c$  zwar injektiv, aber nahe  $p = c(t_0) = \lim_{t \rightarrow b} c(t)$  für ein  $t_0 \in (a, b)$  ist das Bild von  $c$  trotzdem lokal noch kein Funktionsgraph.

**Definition 1.3.3.**  $a \in \mathbb{R}^k$  ist *regulärer Wert* einer differenzierbaren Funktion  $f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $k \leq n$ , falls für jeden Punkt  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$  mit  $f(x) = a$  die Ableitung  $D_x f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$  (eine  $k \times n$ -Matrix) maximalen Rang hat.

In der obigen Situation ist  $D_x f$  surjektiv. Man sagt, dass  $f$  eine *Surjektion* in  $x$  ist.

## 1 Integration

**Satz 1.3.4.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- (a) (' $M$  ist lokal ein Funktionsgraph')  $M$  ist eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit wie in Definition 1.3.1.
- (b) (' $M$  ist lokal eine Nullstellenmenge') Für jeden Punkt  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^{n=m+k}$  und eine glatte Funktion  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ , so dass  $0 \in \mathbb{R}^k$  regulärer Wert von  $f$  ist und  $f^{-1}(0) = V \cap M$ .
- (c) (' $M$  ist lokal eine Immersion') Vgl. Abbildung 1.15. Für jeden Punkt  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  und eine glatte Abbildung  $F: U \rightarrow V$ , so dass gilt:
- (i)  $F(U) = M \cap V$  und  $F: U \rightarrow M \cap V$  ist ein Homöomorphismus\* .
  - (ii) Die Jacobimatrix  $D_u F$  hat für alle  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in U$  maximalen Rang, also Rang  $m$ .

Die Abbildung  $F$  heißt lokale Parametrisierung von  $M$ . Man nennt  $u = (u_1, \dots, u_m)^T$  lokale Koordinaten von  $M$ .

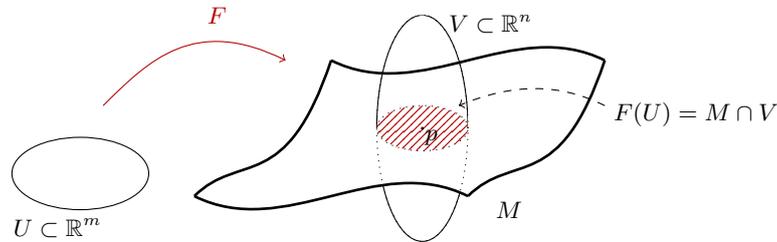


Abbildung 1.15: lokale Parametrisierung

Das Kriterium vom regulären Wert (Satz 1.3.4.b) liefert schnell viele Beispiele für Untermannigfaltigkeiten. Bevor wir dann Satz 1.3.4 beweisen, schauen wir uns einige Beispiele für die Verwendung von (b) an.

**Beispiel 1.3.5.** (Beispiele für die Anwendung von Satz 1.3.4.b)

- (i)  $S^1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ : Wir wissen schon, dass  $S^1$  eine Untermannigfaltigkeit ist. Mit dem Kriterium vom regulären Wert kann man dies auch sehen: Wähle  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Dann ist  $D_{(x,y)} f = (2x, 2y)$ . Der Rang ist 1

\*Homöomorphismus = stetige Abbildung, die eine stetige Umkehrabbildung besitzt.  
Die Umkehrabbildung  $F^{-1}: M \cap V \rightarrow U$  ist hier eine Abbildung von  $M \cap V$ , was als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  selbst wieder ein metrischer Raum ist. D.h. wir wissen, was hier Stetigkeit bedeutet. Allerdings ist es i.A. leichter, dass in konkreten Situation wie folgt zu überprüfen:  $F^{-1}$  ist stetig, falls es eine stetige Abbildung  $G: V \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n-m}$  mit  $G|_{M \cap V} = F$  gibt. Oder in dem man schon direkt  $F$  fortsetzt zu einem Homöomorphismus  $\tilde{F}: W \subset U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow f(W) \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\tilde{F}|_{U \times \{0\}} = F$ , denn dann ist  $F: U \rightarrow F(U)$  automatisch auch ein Homöomorphismus.

für alle  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Da aber  $(0, 0) \notin f^{-1}(0)$ , folgt mit Satz 1.3.4, dass  $S^1$  eine Untermannigfaltigkeit ist.

(ii) Noch mal  $S^1$ : Wählt man aber

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y)^T \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2,$$

dann ist zwar  $f^{-1}(0) = S^1$ , aber

$$D_{(x,y)} f = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 - 1))$$

ist die Nullmatrix für  $(x, y)^T \in S^1$ . Für dieses  $f$  ist also 0 kein regulärer Wert und unsere Rechnung hier sagt nichts darüber aus, ob  $S^1$  nun eine Untermannigfaltigkeit ist oder nicht. Daran sieht man sehr schon, dass das Kriterium zwar sehr gut, dazu geeignet ist, zu zeigen, dass etwas eine Untermannigfaltigkeit ist – doch muss man ggf. das  $f$  richtig 'raten'.

(iii) Bis jetzt haben wir nur Beispiele von *Hyperflächen* (= Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n-1$  = Kodimension-1-Untermannigfaltigkeiten) betrachtet. Als nächstes kommt ein Beispiel mit höherer *Kodimension* (=  $n$ -Dimension der Untermannigfaltigkeit):

$$M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

(Das ist eine Ellipse.) Wir setzen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z)^T \mapsto (x^2 + y^2 - 1, x + y + z - 1)^T$$

Dann ist  $f$  glatt mit  $f^{-1}(0 \in \mathbb{R}^2) = M$ . Um zu sehen, dass 0 ein regulärer Wert ist, betrachten wir

$$D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da für  $(x, y) \in M$  nicht sowohl  $x$  als auch  $y$  gleichzeitig Null sind, hat diese Matrix für alle  $(x, y) \in M$  Rang 2 – also vollen Rang. Also ist  $M$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel 1.3.6.** (Beispiele für die Anwendung von Satz 1.3.4.c)

(i)  $S^1 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$  - Parametrisierung mittels Winkel:

$$F: U = (-\pi, \pi) \rightarrow S^1 \cap \underbrace{(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)^T\})}_{=V}, \quad \alpha \mapsto (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

( $D_\alpha F = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$  hat Rang 1) Hier ist  $F$  sogar für alle  $p \in S^1 \setminus \{(-1, 0)^T\}$  eine lokale Parametrisierung (unendlich oft differenzierbar, bijektiv, Umkehrabbildung stetig\*, max. Rang der Ableitung). Um  $\{(-1, 0)^T\}$  kann man ganz analog

---

\*Um zu sehen, dass  $F^{-1}$  stetig ist, betrachten wir  $\tilde{F}: W := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \tilde{F}(W) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(r, \alpha) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ . Dies ist sogar ein Diffeomorphismus und somit ist insbesondere  $\tilde{F}^{-1}$  und damit  $F$  stetig.

## 1 Integration

eine Parametrisierung bauen ( $F: U = (0, 2\pi) \rightarrow S^1 \cap (R^2 \setminus \{(0, 1)^T\})$ ). Also ist  $S^1$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ .

(ii) Der (Rotations-)Torus,  $0 < r < R$ , ist das Bild der Abbildung  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(u, v) = (\underbrace{(R + r \cos u)}_{\in (R-r, R+r)} \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

Die Jacobimatrix

$$D_{(u,v)}F = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \sin u \sin v & r \cos u \\ -(R + r \cos u) \sin v & (R + r \cos u) \cos v & 0 \end{pmatrix}$$

hat immer vollen Rang. Damit ist jede Einschränkung  $F|_U$  für  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen, für die  $F|_U$  ein Homöomorphismus aufs Bild ist, eine lokale Parametrisierung. Z.B. ist  $F|_{(0,2\pi) \times (0,2\pi)}$  ist eine lokale Parametrisierung um alle Punkte des Torus einen Kreis in der  $x - y$ -Ebene und einen senkrecht dazu.

Bevor wir zum Beweis des Satzes 1.3.4 kommen, wiederholen wir noch kurz den Satz über implizite Funktionen, da wir diesen gleich benötigen:

**Satz 1.3.7** (Satz über implizite Funktionen). [2, Satz 1.7.18] Sei  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  offen. Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar. Sei  $(x_0, y_0) \in U$  ( $x_0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^k$ ) und  $f(x_0, y_0) = z_0$ . Sei  $\partial_y f(x_0, y_0): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  invertierbar\*. Dann gibt es offene Umgebungen  $V$  von  $x_0$  und  $W$  von  $y_0$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset \mathbb{R}^k$  mit

$$\{(x, y) \in V \times W \mid f(x, y) = z_0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}.$$

Insbesondere ist dann  $g(x_0) = y_0$ . War  $f$  schon glatt, dann ist es auch  $g$ .

*Beweis von Satz 1.3.4.* '(a)  $\implies$  (b)': Sei  $g: \hat{V} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \hat{W} \subset \mathbb{R}^k$  und  $p \in \hat{V} \times \hat{W}$  wie in (b). Wir definieren  $f: V := \hat{V} \times \hat{W} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  durch

$$f(v, w) := w - g(v).$$

Dann ist  $f^{-1}(0) = \text{graph}(g) = M \cap (\hat{V} \times \hat{W})$ . Außerdem ist

$$\underbrace{D_{(v,w)}f}_{k \times n\text{-Matrix}} = \left( -\underbrace{D_v g}_{k \times m}, \underbrace{\text{Id}_k}_{k \times k} \right)$$

Also ist  $\text{Rang}(D_{(v,w)}F) = k$ , und damit ist 0 regulärer Wert von  $f$ .

'(b)  $\implies$  (a)' Da  $0 \in \mathbb{R}^k$  regulärer Wert von  $f$  ist, hat  $D_p f$  Rang  $k$ . Nach Umordnen der Koordinatenreihenfolge, können wir annehmen, dass die letzten  $k$ -Spalten linear

\* $\partial_y f(x_0, y_0)$  ist der Teil der Matrix  $D_{(x_0, y_0)}f$  der die Ableitung in die Koordinatenrichtungen von  $y_0$  enthält – also  $D_{(x_0, y_0)}f = \underbrace{(\partial_x f(x_0, y_0))}_{m \times k}, \underbrace{\partial_y f(x_0, y_0)}_{k \times k}$

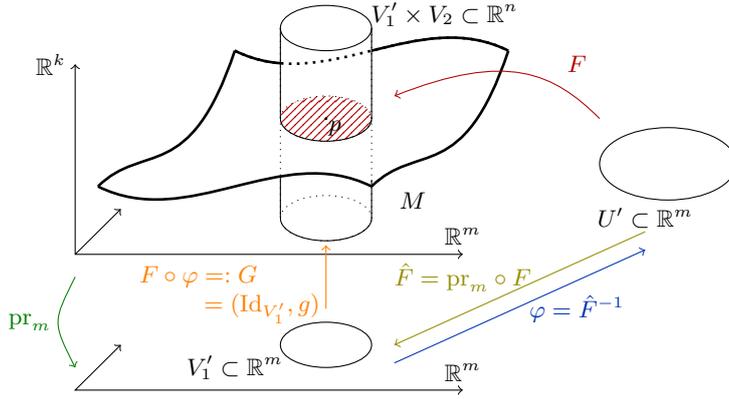


Abbildung 1.16: Abbildung zum Beweis (c)  $\implies$  (a) aus Satz 1.3.4.

unabhängig sind. Sei  $p = (p_1 \in \mathbb{R}^m, p_2 \in \mathbb{R}^k)$ . Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine offene Umgebung  $\hat{V}$  von  $p_1$ , eine offene Umgebung  $\hat{W}$  von  $p_2$  und eine glatte Abbildung  $g: \hat{V} \rightarrow \hat{W}$  mit  $f(u, g(u)) = 0$ ,  $g(p_1) = p_2$  und

$$\text{graph}(g) = f^{-1}(0) \cap (\hat{V} \times \hat{W}) = M \cap (\hat{V} \times \hat{W}). \quad \square$$

'(a)  $\implies$  (c)' ÜA 26.ii

'(c)  $\implies$  (a)' Wir wollen aus einer lokalen Parametrisierung eine Beschreibung als Funktionsgraph machen. Die Idee ist, dass man dabei einfach das Bild der Parametrisierung selbst als Funktionsgraph über eine geeignete Teilmenge der Koordinaten versteht.

Sei  $\text{pr}_m$  (bzw.  $\text{pr}^m$ ):  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Projektion auf die ersten (bzw. letzten)  $m$  Koordinaten ( $n \geq m$ ), also  $\text{pr}_m(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)^T$  und  $\text{pr}^m(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)^T$ .

Sei  $p \in M$  beliebig und  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n=m+k}$  eine lokale Parametrisierung. O.B.d.A. habe  $V$  die Form  $V_1 \times V_2$  mit  $V_1 \subset \mathbb{R}^m$  und  $V_2 \subset \mathbb{R}^k$  (Das kann durch Verkleinern von  $U$  immer erreicht werden.).

Setze  $u := F^{-1}(p)$ . Da der Rang von  $D_u F$  gleich  $m$  ist, es also  $m$  linear unabhängige Spalten geben muss, können wir o.B.d.A. (durch Umordnung der Koordinaten direkt am Anfang) annehmen, dass  $D_u(\text{pr}_m \circ F)$  Rang  $F$  hat. Wir wenden nun den Satz über inverse Funktionen  $\hat{F} := \text{pr}_m \circ F = (F_1, \dots, F_m)$  an. Dann existiert eine offene Umgebung  $U' \subset U$  von  $u$  und  $V_1' \subset V_1$  von  $\text{pr}_m(p) \in V_1$ , so dass die Einschränkung  $\hat{F}: U' \rightarrow V_1'$  ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen das Inverse mit  $\varphi: V_1' \rightarrow U'$  und definieren  $G := F \circ \varphi: V_1' \subset \mathbb{R}^m \rightarrow F(U') \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für alle  $v \in V_1'$

$$\begin{aligned} G(v) &= (F \circ \varphi)(v) = (\text{pr}_m(F(\varphi(v))), \text{pr}^k(F(\varphi(v)))) \\ &= (\hat{F}(\varphi(v)), \text{pr}^k(G(v))) = (v, \underbrace{\text{pr}^k \circ G}_{=: g})(v). \end{aligned}$$

## 1 Integration

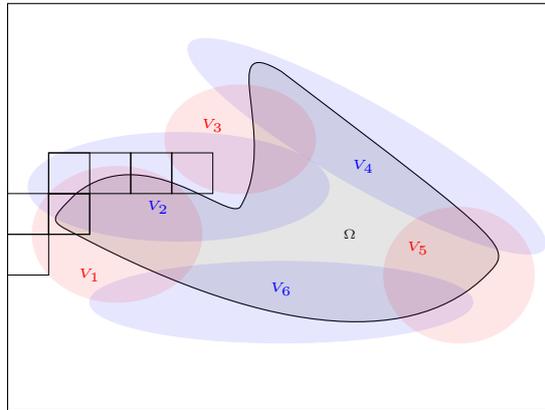


Abbildung 1.17: Abbildung zum Beweis von Satz 1.4.1: In den blauen  $V_i$  ist  $\partial\Omega$  ein Funktionsgraph über  $x$ , in den roten über  $y$ .

Die Abbildung  $g: \hat{V} := V'_1 \rightarrow \text{pr}^k(F(U')) =: \hat{W} \subset \mathbb{R}^k$  erfüllt (1.1): Sei  $(v, w) \in \text{graph } g = \{(v, w) \in \hat{V} \times \hat{W} \mid g(v) = w\}$ . Dann gilt

$$(v, w) = (v, g(v)) = G(v) = F(\varphi(v)) \in F(U') \subset F(U) = M \cap V \subset M.$$

Sei andererseits  $(v, w) \in M \cap (\hat{V} \times \hat{W})$ . Da  $\hat{F}: U' \rightarrow V'_1 = \hat{V}$  und damit  $F: U' \rightarrow M \cap (\hat{V} \times \hat{W})$  bijektiv ist, existiert genau ein  $u' \in U'$  mit  $(v, w) = F(u')$ . Also ist  $v = \hat{F}(u')$  und  $\varphi(v) = u'$ . Damit gilt

$$(v, w) = F(u') = F(\varphi(v)) = G(v) = (v, g(v)),$$

also  $g(v) = w$ .

### 1.4 Volumina, die durch Untermannigfaltigkeiten eingeschlossen sind

Wir haben bis jetzt schon verschiedenen Volumina berechnet, z.B. in ÜA12 das Volumen eines Rotationsellipsoid  $\Omega$  mittels Fubini. Dabei haben wir verwendet, dass wir schon wussten, dass  $1_\Omega$  integrierbar ist. Beim Rotationsellipsoid folgt das aus Lemma 1.2.9/Beispiel 1.2.10, da das Rotationsellipsoid als Bereich zwischen dem Funktionsgraph zweier stetiger Funktionen aufgefasst werden kann. Für eine Fläche  $\Omega$  wie in Abbildung 1.17 ist dies so direkt nicht mehr so. Allerdings kann man auch hier Lemma 1.2.9 zeigen, dass  $1_\Omega$  integrierbar ist: Man nutzt die Additivität des Integrals und zerlegt den Bereich in genügend kleine Quader wie im Bild, so dass auf  $1|_\Omega$  eingeschränkt auf jeden Quader jeweils Lemma 1.2.9 anwendbar ist.

Auf diese Weise kann man insbesondere zeigen, dass stetige Funktionen auf Menge, die durch Untermannigfaltigkeiten eingeschlossen werden, integrierbar sind:

#### 1.4 Volumina, die durch Untermannigfaltigkeiten eingeschlossen sind

**Satz 1.4.1.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und derart, dass  $\partial\Omega$  eine  $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  ist. Sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  integrierbar.*

*Beweis.* Da  $\Omega$  kompakt ist, gibt es einen Quader  $Q$  mit  $\Omega \subset \text{Inneres}(Q)$ . Es ist auch  $\partial\Omega$  als abgeschlossene Teilmenge von  $\Omega$  wieder kompakt. Nach Satz 1.3.4 gibt es für jedes  $p \in \partial\Omega$  eine offene Umgebung  $V_p \subset \mathbb{R}^n$ , so dass  $\partial\Omega \cap V_p$  ein Funktionsgraph über  $n - 1$  der  $n$  Koordinaten ist. Damit ist  $(V_p)_{p \in \partial\Omega}$  eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $\partial\Omega$ . Nach [2, Satz 2.3.3] gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $(V_{p_i})_{i=1}^k$ .

Für gegebenes  $\ell \in \mathbb{N}$  betrachten wir nun die Zerlegung von  $Q$  der Ordnung  $\ell$  – die entsprechenden Teilquader sind  $Q_{j_1 \dots j_n}^\ell$  für  $j_i \in \{1, \dots, \ell\}$ . Für  $\ell$  groß genug gibt es für jedes  $p \in \partial\Omega$  mit  $p \in Q_{j_1 \dots j_n}^\ell$  für geeignete  $j_1, \dots, j_n$  ein  $i \in \{1, \dots, k\}$  mit  $Q_{j_1 \dots j_n}^\ell \subset V_{p_i}$ .

Nach Definition ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, wenn  $\tilde{f} = f1_\Omega: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Letztere ist integrierbar, wenn ihre Einschränkung auf jeden Teilquader  $Q_{j_1 \dots j_n}^\ell$  integrierbar ist.

Die Menge der Teilquader  $Q_{j_1 \dots j_n}^\ell$  besteht einmal aus allen Teilquadern, die mit  $\Omega$  keine Punkte gemeinsam haben. Dort ist  $\tilde{f}$  konstant Null und damit insbesondere integrierbar. Außerdem gibt es noch die Menge der Teilquader  $Q_{j_1 \dots j_n}^\ell$ , die vollständig in  $\Omega$  liegen. Dort ist  $f = \tilde{f}$ , damit auf diesen Teilquadern insbesondere stetig und somit nach Satz 1.2.6 integrierbar. Die verbleibenden Teilquader sind nun solche, die sowohl Punkte in  $\Omega$  als auch außerhalb von  $\Omega$  enthalten. Nach Wahl von  $\ell$  ist für solche Teilquader die Menge  $\Omega \cap Q_{j_1 \dots j_n}^\ell$  die Menge unter einem Funktionsgraphen und damit ist nach Lemma 1.2.9  $f$  auf diesen Teilquadern auch integrierbar.  $\square$

Analog können wir in Dimension 2 sogar sagen:

**Satz 1.4.2.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  kompakt und derart, dass  $\partial\Omega$  das Bild einer stückweise- $C^1$ -Kurve ist. Sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  integrierbar.*

*Beweis.* Geht sehr analog zum letzten Beweis.  $\square$

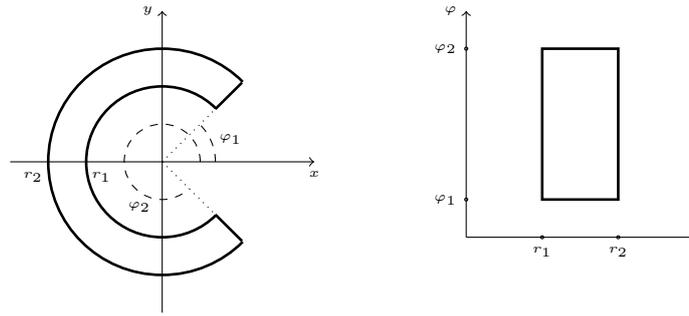


Abbildung 1.18: Das  $C$  links im Bild verwandelt sich in Polarkoordinaten zu einem Rechteck. Will man den Flächeninhalt von  $C$  mit Hilfe der Polarkoordinaten berechnen, muss man berücksichtigen, wie sehr das Volumen durch die Abbildung verzerrt wird.

## 1.5 Integration in anderen Koordinaten

Wir können nun zwar z.B. den Flächeninhalt des Buchstabens  $C$  in Abbildung 1.18 berechnen, in dem wir die Fläche so zerlegen, dass wir  $C$  stückweise als Funktionsgraph betrachten können und dann Lemma 1.2.9 verwenden. Geht, ist aber etwas anstrengend\*.

*Was können wir stattdessen tun?* Betrachten wir die Menge in Polarkoordinaten wie in der Abbildung 1.18, vgl. auch (1.2). Dann wird aus dem  $C$  einfach ein Quader. Aber natürlich ist der Flächeninhalt vom  $C$  nicht einfach der des Quaders. Sondern durch den Diffeomorphismus/Koordinatenwechsel wird Volumen verzerrt.

Das wird in folgender Formel berücksichtigt. Zur Anschauung des 'Verzerrungsfaktors' siehe Abbildung 1.19.

**Satz 1.5.1** (Transformationsformel). *Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $Q$  ein Quader mit  $Q \subset U$ . Sei  $\varphi: V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus. Ist  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, dann gilt*

$$\int_Q f \, d\text{vol} = \int_{\varphi^{-1}(Q)} (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| \, d\text{vol}.$$

Den Faktor  $|\det D\varphi|$  nennt man *Funktionaldeterminante* von  $\varphi$ .

Um den letzten Satz zu beweisen, brauchen wir folgendes Lemma, welches wir als ÜA11 auslagern:

**Lemma 1.5.2.** *Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader,  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $fg: Q \rightarrow \mathbb{R}$  auch integrierbar.*

*Beweis von Satz 1.5.1.* Zuerst halten wir fest:

---

\*Alternativ könnten wir natürlich auch benutzen, dass wir schon wissen, was der Flächeninhalt eines Kreises ist. Darum geht es hier aber nicht.

## 1.5 Integration in anderen Koordinaten

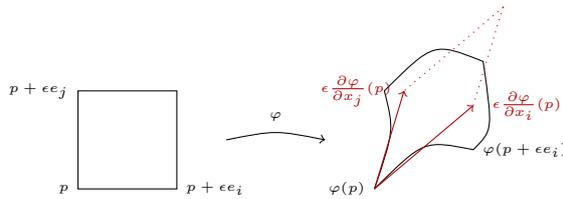


Abbildung 1.19: Für  $\epsilon$  klein genug kann das Bild des Quadrates  $Q_\epsilon = [0, \epsilon]^n$  ungefähr durch das Bild unter  $D_p\varphi$  beschrieben werden (lineare Approximationseigenschaft). Damit ist der Flächeninhalt von  $\varphi(Q_\epsilon)$  ungefähr der des Parallelepipeds, welches von den  $\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)$  in  $\varphi(p)$  aufgespannt wird. Der Quotient der Volumina von Parallelepiped zu Quader ist also  $\left| \det \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(p) \right) \right| = |\det(D_p\varphi)|$ . Dieses 'ungefähr' gleich groß kann man präzisieren und auch so dann die Transformationsformel beweisen, wir werden aber einen Zugang über Induktion wählen.

- Für  $n = 1$  ist dies einfach die Substitutionsregel für  $Q = [a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}([a, b])} (f \circ \varphi)(x) |\varphi'(x)| dx$$

Der Betrag bei  $|\varphi'(x)|$  taucht in der Substitutionsregel so nicht auf, dort sind eventuelle Vorzeichen in der Reihenfolge der Integrationsgrenzen versteckt.

- Vertauschen wir die Koordinatenreihenfolge ändert sich die rechte Seite nicht. In der linken Seite führt das maximal zu einem anderen Vorzeichen von  $\det(D\varphi)$  (Multilinearität der Determinante), aber der Betrag ändert sich nicht.
- Stimmt die Formel für Diffeomorphismen  $\varphi: V \rightarrow U$ ,  $\psi: W \rightarrow V$ , dann auch für die Hintereinanderausführung  $\varphi \circ \psi: W \rightarrow U$ : Das folgt direkt aus der Kettenregel  $D(\varphi \circ \psi) = D\varphi \circ D\psi$  und der Multiplikationsregel für Determinanten.

Die Idee zum Beweis der Transformationsformel ist nun lokal (auf kleinen Quadern) Induktion zu verwenden und dann alles zusammenzulegen:

Nehmen wir zunächst an, dass es bei gegebenem  $\varphi$  zu jedem Punkt  $p$  eine offene Umgebung  $U_p \subset U$  mit einem Quader  $Q_p \subset U_p$  gibt, so dass für die Einschränkung  $\varphi: V_p = \varphi^{-1}(U_p) \rightarrow U_p$  und  $Q_p$  die Transformationsformel gilt.

Dann ist  $(\text{Inneres}(Q_p))_{p \in Q}$  eine offene Überdeckung von  $Q$ . Da  $Q$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $(\text{Inneres}(Q_{p_i}))_{i=1, \dots, m}$ . Wie im Beweis von Satz 1.4.1 reicht es nun die auf den Teilquadern nachzurechnen.

Es bleibt also die Existenz der  $U_p$  zu zeigen. Dies machen wir per vollständiger Induktion über die Dimension  $n$ . Der Induktionsanfang ist  $n = 1$  – dort gilt der Satz nach der

## 1 Integration

Substitutionsregel, s.o. Nehmen wir also an der zu zeigende Satz gilt für alle Dimension  $m < n$ .

Da  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, muss es mindestens einen Eintrag in  $D_p\varphi$  geben, der nicht Null ist. O.B.d.A. sei dies  $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(p)$ . Wir definieren

$$\psi(x_1, \dots, x_n) := (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Wegen  $D_p\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(p) & *_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-1) \times 1} & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix}$  ist  $\det D_p\psi = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$ . Damit gibt es nach dem Satz über inverse Funktionen eine offene Umgebung  $V_p$  von  $p$ , so dass  $\psi|_{V_p}: V_p \rightarrow \psi(V_p)$  ein Diffeomorphismus ist. Dann gilt  $\varphi|_{V_p} = (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \psi|_{V_p}$  sowie  $(\varphi \circ \psi^{-1})(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \kappa(y_1, \dots, y_n))$  für eine geeignete Funktion  $\kappa: \psi(V_p) \rightarrow \text{pr}_1^{-1}(\varphi(V_p))$ . Da  $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(V_p) \rightarrow \varphi(V_p)$  ein Diffeomorphismus ist, ist

$$\tilde{\kappa}_{y_1}(y_2, \dots, y_n) := \kappa(y_1, \dots, y_n)$$

für alle  $y_1 \in \text{pr}_1(\psi(V_p))$  auch diffeomorph aufs Bild. Insbesondere gilt

$$D_{(y_1, \dots, y_n)}(\varphi \circ \psi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times (n-1)} \\ *_{(n-1) \times 1} & D\tilde{\kappa}_{y_1} \end{pmatrix}$$

und somit  $\det D_{(y_1, \dots, y_n)}(\varphi \circ \psi^{-1}) = \det D\tilde{\kappa}_{y_1}$ . Sei  $Q_p = J_1 \times \dots \times J_n \subset \psi(V_p)$  ein Quader um  $p$ .

Da  $f$  auf  $Q$  integrierbar ist, ist es auch auf  $Q_p \subset Q$  integrierbar.

$$\begin{aligned} \int_{Q_p} f \, \text{dvol} &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{J_1} \int_{J_2 \times \dots \times J_n} f(y_1, y_2, \dots, y_n) \, dy_n \dots dy_2 dy_1 \\ &\stackrel{\text{Ind.vor}}{=} \int_{J_1} \left( \int_{\tilde{\kappa}_{y_1}^{-1}(J_2 \times \dots \times J_n)} f(y_1, \tilde{\kappa}_{y_1}(x_2, \dots, x_n)) |\det D\tilde{\kappa}_{y_1}| \, dx_n \dots dx_2 \right) dy_1 \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{(\varphi \circ \psi^{-1})^{-1}(Q_p)} (f \circ \varphi \circ \psi^{-1})(y_1, x_2, \dots, x_n) |\det D\tilde{\kappa}_{y_1}| \, dy_1 dx_n \dots dx_2 \\ &\stackrel{n=1}{=} \int_{\varphi^{-1}(Q_p)} (f \circ \varphi) \left| \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \right| |\det D\tilde{\kappa}_{y_1}| \, dx_1 dx_n \dots dx_2 \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q_p)} (f \circ \varphi) |\det D\psi| |\det D(\varphi \circ \psi^{-1})| \, \text{dvol} \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q_p)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, \text{dvol}. \end{aligned}$$

Hier verwenden wir im zweiten Schritt die Induktionsvoraussetzung für die Substitution  $(x_2, \dots, x_n) = \tilde{\kappa}_{y_1}(y_2, \dots, y_n)$ ; im dritten Schritt, dass  $\{(y_1, \tilde{\kappa}_{y_1}(x_2, \dots, x_n)) \mid y_1 \in J_1, x_i \in J_i\} = (\varphi \circ \psi^{-1})^{-1}(Q_p)$  ist. Im vierten Schritt ist die Transformationsformel für  $n = 1$  angewendet auf  $x_1 \mapsto y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bei festem  $x_2, \dots, x_n$  im inneren Integral über  $J_1$ .  $\square$

**Beispiel 1.5.3.** Wir wollen nun den Flächeninhalt vom  $C = C(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$  aus Abbildung 1.18 in Polarkoordinaten berechnen. Es ist

$$\Phi: (\varphi, r) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty) \mapsto (x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, \infty)\} \quad (1.2)$$

ein Diffeomorphismus. Dann ist  $D_{(\varphi, r)}\Phi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & \cos \varphi \\ r \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}$  und somit  $|\det D_{(\varphi, r)}\Phi| = r$ . Somit gilt mit der Transformationsformel

$$\int_C \text{dvol} = \int_{[r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]} r dr d\varphi \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2).$$

Um den Flächeninhalt von  $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^2$  nun auch mit der Transformationsformel zu berechnen, können wir die Transformationsformel erst einmal (so wie wir sie formuliert haben) nicht direkt anwenden, da  $\Phi^{-1}$  nicht auf ganz  $\overline{B_r(0)}$  definiert ist, sondern auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ . Aber am Ende ist das kein Problem, denn im Beispiel des Kreises gilt:

Sei  $U_\epsilon := (B_\epsilon(0) \cup \Phi((-\epsilon, \epsilon) \times (0, 1]))$ . Dann ist  $\text{vol}_2 U_\epsilon \leq \text{vol}_2 ([-\epsilon, 1] \times (-\epsilon, \epsilon)) = 2\epsilon(1 + \epsilon)$ . Außerdem ist  $\overline{B_r(0)} \setminus U_\epsilon \subset (0, 2\pi) \times (0, \infty)$ . Damit kann  $\overline{B_r(0)} \setminus U_\epsilon$  durch endlich viele Quader überdeckt werden, die vollständig in  $(0, 2\pi) \times (0, \infty)$  und auf die man somit die Transformationsformel direkt anwenden kann. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2 \overline{B_r(0)} &= \int_{\overline{B_r(0)}} \text{dvol} = \int_{U_\epsilon} \text{dvol} + \int_{\overline{B_r(0)} \setminus U_\epsilon} \text{dvol} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{B_r(0)} \setminus U_\epsilon} \text{dvol} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \int_{\epsilon}^1 r dr d\varphi \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi - 2\epsilon) \frac{1}{2} (r^2 - \epsilon^2) = \pi r^2. \end{aligned}$$

Dies gilt allgemeiner:

**Lemma 1.5.4.** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader und sei  $A \subset \Omega \subset Q$  derart, dass  $1_\Omega$  und  $1_A$  beide integrierbar sind und sei  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus mit  $Q \setminus A \subset V$ . Es sei  $|\det D\varphi|$  auf  $U$  beschränkt.

Seien  $B_k = \cup_{A \cap Q_{i_1 \dots i_n}^k \neq \emptyset} Q_{i_1 \dots i_n}^k$  für  $Q_{i_1 \dots i_n}^k$  die Teilquader der Zerlegung der Ordnung  $k$  von  $Q$ . Es gelte  $\text{vol} \varphi^{-1}(B_k \setminus A) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann ist

$$\int_{\Omega} f \text{dvol} = \int_{\varphi^{-1}(\Omega \setminus A)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \text{dvol}$$

und insbesondere existiert das Integral auf der rechten Seite.

## 1 Integration

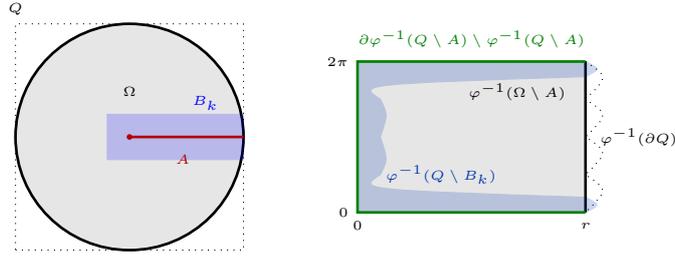


Abbildung 1.20: Da  $A$  Volumen Null hat, geht das Volumen der  $B_k$  für  $k$  gegen unendlich gegen Null. Auf  $\Omega \setminus B_k$  kann nun die Transformationsformel angewendet werden. Dann erhält man aber nicht ganz  $\varphi^{-1}(\Omega \setminus A)$ . Die Bedingung an das Volumen  $\varphi^{-1}(V \setminus B_k)$  sichert aber, dass der verbleibende Teil im Limes  $k \rightarrow \infty$  keine Rolle spielt. Diese Bedingung ist automatisch erfüllt, wenn  $\varphi^{-1}(Q \setminus A) \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist und  $\partial(\varphi^{-1}(Q \setminus A)) \setminus \varphi^{-1}(Q \setminus A) \subset \mathbb{R}^n$  Volumen Null hat (das ist in Anwendungen eigentlich immer der Fall - sonst hat man die falschen/seltene Koordinaten gewählt).

Das Lemma ist etwas 'unförmig' (und auch nicht bestmöglich - aber für unsere Beispiele gut genug). In konkreten Situationen ist normalerweise immer klar, ob es anwendbar ist. Vgl. Abbildung 1.20 auch für die Bedeutung der Voraussetzungen.

*Beweis von Lemma 1.5.4.*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \, d\text{vol} &= \int_{\Omega \setminus B_k} f \, d\text{vol} + \int_{B_k \cap \Omega} f \, d\text{vol} \\ &\stackrel{\text{s.u.}}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Omega \setminus B_k)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol} + \int_{B_k \cap \Omega} f \, d\text{vol} \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\Omega \setminus A)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol} - \int_{\varphi^{-1}(B_k \setminus A)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol} + \int_{B_k \cap \Omega} f \, d\text{vol} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit ist die Summe aus dem Anwenden der Transformationsformel auf die einzelnen Teilquader.

Wegen Beschränktheit der Integranden (durch eine Konstante  $C$ ) gilt

$$\left| \int_{B_k \cap \Omega} f \, d\text{vol} - \int_{\varphi^{-1}(B_k \setminus A)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol} \right| \leq C (\text{vol } B_k + \text{vol } \varphi^{-1}(B_k \setminus A)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 1.5.5.** Sei

$$\Phi: (r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto (ar \cos \varphi, br \sin \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}.$$

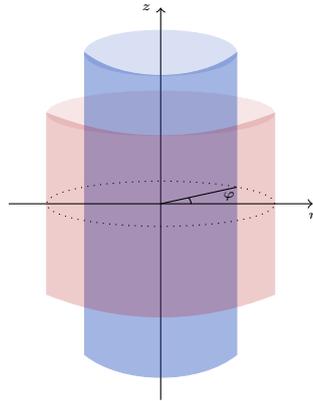


Abbildung 1.21: Zylinderkoordinaten: In der  $x - y$ -Ebene nehmen wir Polarkoordinaten und die  $z$ -Koordinate bleibt wie im Euklidischen. Der Name kommt daher, dass für fester  $r$  die restlichen Koordinaten einen Zylinder beschreiben.

Dies ist ein Diffeomorphismus.

In diesen Koordinaten ist die Menge  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$  (Das Innere und der Rand einer Ellipse) bis auf eine Menge von Volumen Null (nämlich  $\{(x, 0) \mid x \in [0, a]\}$ ) gegeben durch  $\{(r, \varphi) \mid r \in (0, 1] \times (0, 2\pi)\}$ .

Wir haben  $D\Phi = \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{pmatrix}$  und damit  $\det |D\varphi| = abr$ . Somit ist der Flächeninhalt der Ellipse gleich  $\int_0^1 \int_0^{2\pi} abrdrd\varphi = \pi ab$ . Für andere Möglichkeiten den Flächeninhalt der Ellipse zu berechnen, vgl. ÜA21.

### 1.5.1 Beispiele zur Volumenberechnung

Neben Polarkoordinaten gibt es noch andere öfter vorkommende Koordinatensysteme. Welches Koordinatensystem verwendet wird, orientiert sich normalerweise an der Symmetrie des Problems – also hier an der Symmetrie des Integrationsgebietes.

#### Zylinderkoordinaten.

$\Phi: (r, \varphi, z) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geq 0\}$

ist ein Diffeomorphismus. Dessen Jacobimatrix ist

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit } \det D\Phi = r.$$

## 1 Integration

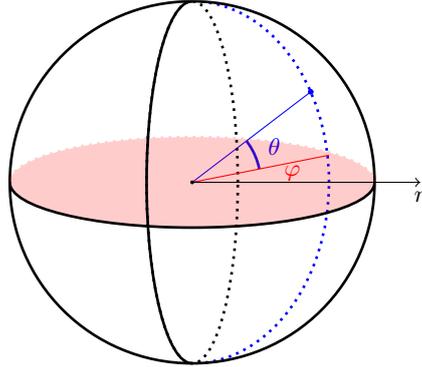


Abbildung 1.22: Kugelkoordinaten: Für festen  $r$  parametrisieren  $\varphi$  und  $\theta$  eine Kugel vom Radius  $r$ .

**Beispiel 1.5.6** (Volumen von Rotationskörpern). Das haben wir in ÜA10 schon einmal mit Fubini ausgerechnet. Hier nochmal mit der Transformationsformel und Zylinderkoordinaten: Sei  $R: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  stetig. Dann beschreibt

$$\Omega := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq R(z), z \in [a, b]\}$$

einen Körper, der rotationssymmetrisch bei Drehung um die  $z$ -Achse ist.

Es ist dann nach Transformationsformel und Lemma 1.5.4

$$\text{vol } \Omega = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} r \, dr \, d\varphi \, dz = \pi \int_a^b R^2(z) \, dz.$$

### Sphärische Koordinaten/Kugelkoordinaten.

$$\Phi: (r, \varphi, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Diffeomorphismus, vgl. Abbildung 1.22, mit

$$D_{(r, \varphi, \theta)} \Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ und } \det D_{(r, \varphi, \theta)} \Phi = r^2 \cos \theta$$

**Beispiel 1.5.7** (Volumen von einer Kugel im  $\mathbb{R}^3$  mit Radius  $R$ ). Auch wenn die Kugel durch sphärische Koordinaten nicht vollständig abgedeckt wird, können wir mit analoger Argumentation wie beim Flächeninhalt des Kreises wieder rechnen:

$$\text{vol } \overline{B_R(0)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = 2\pi \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

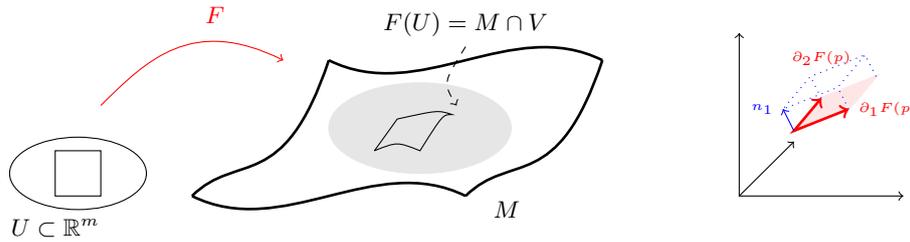


Abbildung 1.23: Links: Unter der lokalen Parametrisierung wird ein Quader  $Q$  in  $U$  wieder verzerrt. Wenn der Quader klein genug ist, kann man das Bild durch das  $m$ -dimensionale Parallelepiped in  $\mathbb{R}^n$  annähern, welches das Bild  $D_u F(Q)$  ist ( $u \in Q$ ).

Rechts: Um das  $m$ -dimensionale Volumen des Parallelepeds  $D_u F(Q)$  zu bestimmen, machen wir daraus mittels einer Orthonormalbasis  $n_i$  von  $(T_{F(u)}M)^\perp$  ein  $n$ -dimensionales Parallelepiped.

### 1.5.2 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Wir wollen nun auch gerne Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten integrieren und damit insbesondere auch das Volumen von Untermannigfaltigkeiten bestimmen können (und damit z.B. die Oberfläche einer Kugel).

Die Grundidee ist dabei ähnlich wie bei Transformationsformel. Wir würden gerne über Gebiete integrieren, die einfacher sind. Hier: Statt über die Untermannigfaltigkeit  $M$  zu integrieren, wollen wir lokale Parametrisierungen  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  nutzen, um statt über  $F(U) = M \cap V$  über  $U$  zu integrieren. Dabei müssen wir natürlich wieder berücksichtigen, dass dabei kleine Teilquader in  $U$  in  $F(U)$  verzerrt werden.

Der Verzerrungsfaktor entspricht für Quader klein genug wieder ungefähr wieder dem  $m$ -dimensionalen Volumen des von  $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}$  aufgespannten Parallelepeds. Der Unterschied zur Transformationsformel ist nun, dass dies Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  und somit schon die Determinante von  $DF$  (für  $m \neq n$ ) gar nicht definiert ist.

Stattdessen können wir wie folgt vorgehen: Die Vektoren  $\partial_1 F(u), \dots, \partial_m F(u)^*$  spannen einen  $m$ -dimensionalen Vektorraum, genannt  $T_{F(u)}M$ , auf<sup>†</sup>. Seien  $n_1, \dots, n_{k=n-m}$  für festes  $u \in U$  eine Orthonormalbasis von  $(T_{F(u)}M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $|\det B|$  für  $B := (D_u F, n_1, \dots, n_k)$  (nun eine quadratische Matrix) gleich dem Volumen des Parallelepeds, welches von  $\partial_i F$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $n_1, \dots, n_k$  aufgespannt wird, vgl. Abbildung 1.23 rechts. Da die  $n_i$  senkrecht auf  $T_{F(u)}M$  sind, Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind, ist dies gleich dem ( $m$ -dimensionalen) Volumen des Parallelepeds in  $T_{F(u)}M \cong \mathbb{R}^m$ , welches von  $\partial_i F$ ,  $i = 1, \dots, m$  gebildet wird.

\*Kurzschreibweise:  $\partial_i F(u) := \frac{\partial F}{\partial x_i}(u)$

†Das ist der *Tangentenraum* von  $M$  im Punkt  $F(u)$ . Wir werden später sehen, dass dieser unabhängig von der gewählten lokalen Parametrisierung ist.

## 1 Integration

Andererseits ist (da  $\partial_i F(u) \perp n_j$ )

$$B^T B = \begin{pmatrix} (D_u F)^T D_u F & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & \text{Id}_{k \times k} \end{pmatrix}$$

und damit ist das Volumen des Parallelepipeds gleich

$$|\det B| = \sqrt{|\det(B^T B)|} = \sqrt{|\det(D_u F)^T D_u F|}.$$

Dies motiviert die folgende Definition:

**Definition 1.5.8.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit für die es eine lokale Parametrisierung  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $M = F(U)$  gibt. Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $Q \subset U$  ein Quader. Dann nennen wir  $f: F(Q) \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, wenn das Integral

$$\int_{F(Q)} f \, \text{dvol} := \int_Q (f \circ F) \sqrt{|\det((DF)^T(DF))|} \, \text{dvol}$$

existiert.

Ein oft verwendeter Spezialfall ist  $m = 2$  und  $n = 3$ : Dann ist das Volumen des Parallelogramms, welches durch  $\partial_1 F(u)$  und  $\partial_2 F(u)$  aufgespannt wird gleich  $|\partial_1 F(u) \times \partial_2 F(u)|$ . D.h. in diesem Fall ist  $\sqrt{|\det((DF)^T(DF))|} = |\partial_1 F(u) \times \partial_2 F(u)|$ .

Die obige Definition suggeriert durch die Wahl der Begriffe, dass dieses Integral etwas mit den zuvor definierten zu tun hat und dass das Ergebnis unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung ist. Das wollen wir gleich noch sehen. Zuvor jedoch ein paar Beispiele:

**Beispiel 1.5.9** (Oberfläche einer Kugel). Sei  $M = S^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ . Wir wollen mit Parametrisierungen mittels Kugelkoordinaten (eingeschränkt auf  $r = R$ ) arbeiten

$$F: (\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta \\ R \sin \varphi \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}.$$

Es gilt

$$DF = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta & -R \cos \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (DF)^T DF = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

Das ist eine Parametrisierung der Kugel ohne  $\{(x, 0, z) \mid x^2 + z^2 = R^2, x \geq 0\}$ . Ähnlich wie bei der Volumenberechnung von  $\overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^2$  kann man wieder überlegen, dass die fehlende Menge Volumen Null hat (s.u.) und wir haben

$$\text{vol } S^2(R) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi R^2.$$

## 1.5 Integration in anderen Koordinaten

Dass  $k = \{(x, 0, z) \mid x^2 + z^2 = R^2, x \geq 0\} \subset M$  Volumen Null hat (also  $\int_M 1_k d\text{vol} = 0$  ist), hat den gleichen Grund warum  $[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  Volumen Null hat. Formal sieht man das z.B., wenn man als lokale Parametrisierung Kugelkoordinaten mit 'gedrehtem  $\varphi$  verwendet'  $\tilde{F}(\varphi, \theta) := F(\varphi + \pi, \theta)$ . Dann liegt zumindest der Halbkreis  $k$  ohne  $(0, 0, \pm R)$  im Bild von  $\tilde{F}$  und hat als Urbild die Strecke  $\theta \mapsto (-\pi, \theta)$ . Somit ist  $\text{vol}(k \setminus (0, 0, \pm R) \subset M) = \int_M 1_{k \setminus (0, 0, \pm R)} d\text{vol} = \int_{\{-\pi\} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^2} d\text{vol} = 0$  und analog kann man auch die Punkte  $(0, 0, \pm R)$  betrachten, in dem man z.B.  $\theta$  verschiebt oder in einer Umgebung davon  $S^2(R)$  als Funktionsgraph betrachtet.

**Beispiel 1.5.10** (Oberfläche Zylindermantel). Sei  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in (0, h)\}$ . Wir wollen mit einer lokalen Parametrisierung mittels Zylinderkoordinaten (eingeschränkt auf  $r = R$  und den Höhenbereich des Zylinders) arbeiten

$$F: (\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, h) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}.$$

Das ist eine Parametrisierung von  $M$  ohne die Menge  $\{(R, 0, z) \mid z \in (0, h)\}$ , die aber keinen Beitrag für die Oberfläche liefern wird (analoge Argumentation wie bei der Kugel oben).

Den Volumenverzerrungsfaktor kann man einfach mit  $\sqrt{|\det(DF)^T(DF)|}$  oder  $|\partial_\varphi F \times \partial_z F|$  errechnen, und man erhält  $R$ . Damit ist

$$\text{vol } M = \int_0^{2\pi} \int_0^h R dz d\varphi = 2\pi Rh.$$

**Beispiel 1.5.11** (Oberfläche Kegelmantel). Sei  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2} z^2, z \in (0, h)\}$ . Dann ist  $M$  der Mantel eines Kegels der Höhe  $h$  und kreisförmiger Grundfläche mit Radius  $R$ . Da die Spitze ( $z = 0$ ) nicht Teil von  $M$  ist, ist  $M$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit (sieht man direkt mit Kriterium vom regulären Wert angewendet auf  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{R^2}{h^2} z^2$ ). Wir wollen wieder eine Parametrisierung auf der Basis von Zylinderkoordinaten verwenden, allerdings wählen wir dieses Mal nicht  $r$  konstant sonder  $r$  als geeignete Funktion von  $z$ , vgl. Bild.

$$F: (\varphi, z) \in (0, 2\pi) \times (0, h) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{R}{h} z \cos \varphi \\ \frac{R}{h} z \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}.$$

Das ist eine Parametrisierung von  $M$  ohne die Menge  $\{(\frac{R}{h}z, 0, z) \mid z \in (0, h)\}$ , die aber keinen Beitrag für die Oberfläche liefern wird (analoge Argumentation wie bei der Kugel oben).

Der Volumenverzerrungsfaktor ist nun  $\frac{R}{h^2} z \sqrt{R^2 + h^2}$ . Damit ist

$$\text{vol } M = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{R}{h^2} z \sqrt{R^2 + h^2} dz d\varphi = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}.$$

## 1 Integration

Obiges Beispiel sind alles Beispiele von Oberflächen von Rotationskörpern. Die Oberfläche eines Rotationskörper lässt sich ganz ähnlich dann auch allgemein ausrechnen, vgl. ÜA 32ii.

Nun zurück zur Definition:

**Unabhängigkeit von  $\int_M f \, d\text{vol}$  vom gewählten  $F$ ?** Seien  $F_1: U_1 \rightarrow V_1$  und  $F_2: U_2 \rightarrow V_2$  zwei lokale Parametrisierungen mit  $M = F_1(U_1) = F_1(U_2)$ . Dann ist  $\varphi = F_2^{-1} \circ F_1: U_1 \rightarrow U_2$  ein Homöomorphismus – sogar ein Diffeomorphismus, siehe Begründung unten. Sei  $Q \subset U_2$  ein Quader. Dann ist nach der Transformationsformel:

$$\begin{aligned} & \int_Q (f \circ F_2)(u) \sqrt{|\det((D_u F_2)^T (D_u F_2))|} \, d\text{vol}_u \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q)} (f \circ F_2 \circ \varphi)(v) \sqrt{|\det((D_{\varphi(v)} F_2)^T (D_{\varphi(v)} F_2))|} |\det D_v \varphi| \, d\text{vol}_v \\ &\stackrel{\text{s.u.}}{=} \int_{\varphi^{-1}(Q)} (f \circ F_2 \circ \varphi)(v) \sqrt{|\det((D_{\varphi(v)} F_2 \circ D_v \varphi)^T (D_{\varphi(v)} F_2 \circ D_v \varphi))|} \, d\text{vol} \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q)} (f \circ F_1)(v) \sqrt{|\det(D_v F_1)^T (D_v F_1)|} \, d\text{vol}. \end{aligned}$$

Dabei benutzt die zweite Gleichheit:

$$\det(A^T A) (\det C)^2 = \det(C^T A^T A C) = \det((AC)^T AC).$$

Es bleibt noch zu argumentieren, dass  $\varphi = F_2^{-1} \circ F_1: U_1 \rightarrow U_2$  ein Diffeomorphismus ist: Der wichtige Punkt ist hierbei zu argumentieren, dass diese Abbildung glatt ist, dann ist mit gleicher Argumentation auch  $\varphi^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2$  glatt und der Rest folgt aus der Rang-Bedingung für die Jacobimatrizen der Parametrisierungen und dem Satz über inverse Funktionen. Die Idee um zu zeigen, dass  $\varphi$  glatt in  $u \in U_1$  ist, ist es  $F_2$  nahe  $\varphi(u)$  zu einer glatten Abbildung  $\tilde{F}_2: U_2 \times \mathbb{R}^{k=n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  fortzusetzen (also  $\tilde{F}_2(v, 0) = F_2(v)$  für alle  $v \in U_2$ ), die nahe  $(\varphi(u), 0)$  ein Diffeomorphismus ist. Damit ist dort (wo  $\tilde{F}_2$  ein Diffeo ist)  $\tilde{F}_2^{-1}$  auch glatt. Wegen  $\tilde{F}_2^{-1} \circ F_1 = F_2^{-1} \circ F_1 = \varphi$  ist dann  $\varphi$  in  $u$  glatt.

Es bleibt  $\tilde{F}_2$  zu konstruieren: Da die  $n \times m$ -Matrix  $D_u F_2$  maximalen Rang hat, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die ersten  $m$  Zeilen linear unabhängig sind. Wir setzen

$$\tilde{F}_2: U_2 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (v, t) \mapsto F_2(v) + (0, t).$$

Dann ist  $\tilde{F}_2(v, 0) = F_2(v)$  und  $D_{(u,0)} \tilde{F}_2 = \begin{pmatrix} D_u F_2 & 0_{m \times k} \\ & \text{Id}_k \end{pmatrix}$  hat vollen Rang. Also ist  $\tilde{F}_2$  nach dem Satz über inverse Funktionen nahe  $(u, 0)$  ein Diffeomorphismus.

**Konsistenz mit früheren Definitionen?**

- $m = 1$ : Dann ist  $M = \text{Bild } \gamma$  einer glatten Kurve  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t$ . Dann können wir als lokale Parametrisierung  $F = \gamma$  wählen. Sei  $Q = [a, b] \subset I$ . Dann  $D_t F = \gamma'(t)$  und damit  $\sqrt{|\det((D_t F)^T(D_t F))|} = |\gamma'(t)|$ . Somit gilt

$$\int_{\gamma([a,b])} f \, d\text{vol} = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) |\gamma'(t)| \, dt = \int_{\gamma|_{[a,b]}} f \, ds.$$

- $m = n$ : Dann ist  $M$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $F$  entspricht einem Koordinatenwechsel: Da  $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F(U) \subset M \subset \mathbb{R}^n$  Homöomorphismus und glatt ist und  $DF$  maximalen Rang hat, ist nach dem Satz über inverse Funktionen dann auch  $F^{-1}$  glatt und  $F$  somit ein Diffeomorphismus. Dann ist  $\sqrt{|\det(DF)^T DF|} = |\det DF|$  und wir haben wieder die Transformationsformel.

**Für Mannigfaltigkeiten, die nicht mit nur einer Parametrisierung beschrieben werden können?** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Seien  $(F_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$  endlich viele\* lokale Parametrisierungen von  $M$  mit  $M = \cup_{i \in I} F(U_i)$ . Dann ist die Idee, wie in Seien  $\hat{U}_i \subset U_i$ , derart dass  $F(\hat{U}_i)$  gleich der Schnitt von  $M$  mit endlich vielen Teilquadrern  $Q_{i_1, \dots, i_n}^\ell \subset \mathbb{R}^n$  ist, so dass  $F(\hat{U}_i) \cap F(\hat{U}_j)$  eine Teilmenge des Randes dieser Teilquadermenge ist. Dann setzen wir für  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_M f \, d\text{vol} = \sum_{i \in I} \int_{M \cap F(\hat{U}_i)} f \, d\text{vol}$$

und nennen  $f$  integrierbar, wenn die rechte Seite existiert.

Ist  $1_M: M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so setzen wir wieder

$$\text{vol}_m M := \text{vol } M = \int_M 1_M \, d\text{vol}.$$

und nennen diese Zahl *Volumen* von  $M$ .

In vielen Beispielen, ist es so, dass man eine Parametrisierung  $F: U \rightarrow V$  hat, die  $M$  bis auf eine eine Teilmenge  $A \subset M$  abdeckt und dann das 'Volumen von  $A$ ' als Teilmenge von  $M$  Null ist. Ist  $f$  dann beschränkt, ist  $\int_M f \, d\text{vol} = \int_U (f \circ F) \sqrt{|\det(DF)^T(DF)|} \, d\text{vol}$ . Das ist im Prinzip das Analogon zu Lemma 1.5.4, was wir nicht extra beweisen. Das sehen wir am besten am nächsten Beispiel:

**1.5.3 Divergenz- und Rotationssatz**

Wir haben in Abschnitt 1.23 den Divergenzsatz auf Quadern bewiesen. Ähnliches wollen wir nun für offene und beschränkte Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  deren Rand eine Hyperfläche ( $= (n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ ) ist. Bevor wir den formulieren, schauen wir uns zunächst noch einmal den Begriff des Tangentialraumes an und

---

\*Zumindest wenn  $M$  kompakt ist, kommt man immer mit endlich vielen Parametrisierungen aus.

## 1 Integration

definieren, was im Allgemeinen der äußere Einheitsnormalenvektorfeld  $n: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf  $M = \partial\Omega$  ist.

Wie auf Seite 43 sei der Untervektorraum  $T_p M \subset \mathbb{R}^n$  der *Tangentialraum von  $M$  an  $p$* : D.h. Ist  $F: U \rightarrow V$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  um  $p = F(q)$ , dann ist  $\frac{\partial F}{\partial u_1}(q), \dots, \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}(q)$  eine Basis des Untervektorraums  $T_p M$  von  $\mathbb{R}^n$  (Hier sind  $u_1, \dots, u_{n-1}$  die Koordinaten für  $U$ . Da  $M$  eine Hyperfläche ist, ist dieser Vektorraum  $(n-1)$ -dimensional.). Es ist also  $T_p M = D_q F(\mathbb{R}^{n-1})$ .

*Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung*, wie man wie folgt sieht: Sei  $\hat{F}: \hat{U} \rightarrow \hat{V}$  eine weitere Parametrisierung mit  $\hat{F}(\hat{U}) = F(U)$ . Dann ist  $F^{-1} \circ \hat{F}: \hat{U} \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus, vgl. 46, und somit ist  $D_{\hat{q}}(F^{-1} \circ \hat{F})$  für  $\hat{q} = \hat{F}^{-1}(p = F(q))$  ein Isomorphismus. Also ist

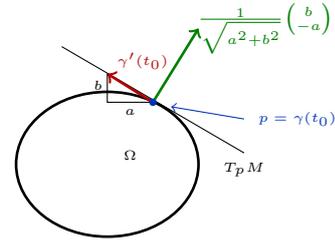
$$D_{\hat{q}} F(\mathbb{R}^{n-1}) = D_q F(D_{\hat{q}}(F^{-1} \circ \hat{F})(\mathbb{R}^{n-1})) = D_q F(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Um dem Namen *Einheitsnormalenvektorfeld* gerecht zu werden, verlangen wir:  $|n(p)|^2 = 1$  und  $n(p) \perp T_p M$  für alle  $p \in M$ . Davon gibt es in jedem  $p$  noch zwei Vektoren, die das erfüllen. Wir wollen zusätzlich noch, dass  $n$  nach  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  zeigt. Das kann man formalisieren, in dem man fordert, dass für alle  $t > 0$  klein genug  $p + tn(p) \notin \Omega$  ist.

### Beispiel 1.5.12.

- (i) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt, so dass  $M = \partial\Omega$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Sei  $\partial\Omega$  entgegen des Uhrzeigersinns durch die glatte einfach geschlossene Kurve  $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrisiert mit  $\gamma'(t) \neq 0$ . Sei nun  $p = \gamma(t_0)$ .

Dann wird  $T_p M$  durch den Vektor  $\gamma'(t_0)$  aufgespannt. Sei  $\gamma'(t_0) = (a, b)^T$ . Dann ist  $v(p) := \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b, a)^T$  ein darauf senkrecht stehender Einheitsvektor und damit ist  $v(p)$  ein Einheitsnormalenvektor in  $p$  an  $M$ . Der gesuchte äußere Einheitsnormalenvektor ist dann  $-v(p)$ , vgl. Abbildung.



- (ii) (Normalenvektor einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$ ) Sei  $F: (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine lokale Parametrisierung einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ . In  $p = F(x, y)$  wird der Tangentialraum durch die Vektoren  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$  und  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$  aufgespannt. Mittels

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right|}$$

erhalten wir einen Einheitsnormalenvektor im Punkt  $p$  an die Fläche.

- (iii) (Spezialfall Rotationsfläche) Sei  $F(\varphi, z) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z)^T$  für eine glatte Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Dann ist  $F$  eine lokale Parametrisierung einer Rotationsfläche, vgl. ÜA 32 und Abbildung 1.24. In  $p = F(\varphi, z)$  wird der

## 1.5 Integration in anderen Koordinaten

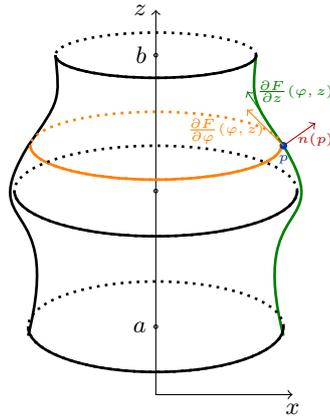


Abbildung 1.24: Äußerer Einheitsnormalenvektor  $n(p)$  auf einem Rotationskörper im Punkt  $p$

Tangentialraum durch die Vektoren  $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, z) = (-f(z) \sin \varphi, f(z) \cos \varphi, 0)^T$  und  $\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi, z) = (f'(z) \cos \varphi, f'(z) \sin \varphi, 1)^T$  aufgespannt. Mittels

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, z) \times \frac{\partial F}{\partial z}(\varphi, z)}{\left| \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, z) \times \frac{\partial F}{\partial z}(\varphi, z) \right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(z))^2}} (\cos \varphi, \sin \varphi, -f'(z))^T$$

erhalten wir einen Einheitsnormalenvektor im Punkt  $p$  an die Fläche. Hier zeigt dieser auch direkt nach außen, ist also gleich dem äußeren Einheitsnormalenvektor des zugehörigen Rotationskörpers im Punkt  $p$ .

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun den Divergenzsatz auf Quadern, Lemma 1.2.14, auch auf Gebieten zeigen, die durch Untermannigfaltigkeiten begrenzt werden:

**Satz 1.5.13** (Divergenzsatz=Gauß'scher Integralsatz). *Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  offen, so dass  $\partial K$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  ist. Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein achsenparalleler Quader und  $\Omega = K \cap Q$ . Sei  $n$  das äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf  $R := \partial\Omega \setminus (\partial K \cap \partial Q)$ . Sei  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V \, \operatorname{dvol} = \int_R \langle V, n \rangle \, \operatorname{dvol}.$$

**Spezialfall:**  $n = 3$ : In einer Parametrisierung  $F : U \rightarrow V$  von  $\partial\Omega$  gilt  $n = \pm \frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|}$  ( $\pm$  je nachdem, wo außen ist) und  $\operatorname{dvol} = |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du_1 \, du_2$ . Insgesamt also

$$\int_{F(U) \subset \partial\Omega} \langle V, n \rangle \, \operatorname{dvol} = \int_U \langle V \circ F, \pm \partial_1 F \times \partial_2 F \rangle \, du_1 \, du_2$$

## 1 Integration

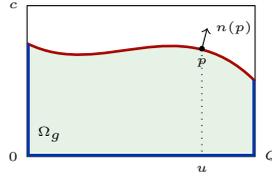


Abbildung 1.25: Abbildung zu Lemma 1.5.14:  $M = \partial\Omega_g$  besteht aus  $\text{graph}(g)$  und einem Anteil am Rand des Quaders  $Q$ :  $\Omega_g \cap \partial Q$ .

Das erklärt auch die Physikernotation von  $\int_{\partial\Omega} V \cdot dA$  statt  $\int_{\partial\Omega} \langle V, n \rangle \text{dvol}$ .

Die Grundidee des Beweises ist es wieder, analog wie in Satz 1.4.1, mittels einer Zerlegung in kleinere Teile, den Satz auf den Fall eines Gebietes, der der Bereich unter einem Funktionsgraphen  $g: Q \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  ist, zurückzuführen. Dort können wir die Behauptung explizit nachrechnen:

**Lemma 1.5.14.** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein Quader. Sei  $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \geq 0$ , stetig differenzierbar. Sei  $\Omega_g = \{(x, y) \in Q \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq g(x)\}$  und  $M = \partial\Omega_g$ . Sei  $n$  das äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf  $M$ . Sei  $V: Q \times [0, c] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, wobei  $c > \sup |g|$  ist, vgl. Abbildung 1.25. Dann gilt

$$\int_{\Omega_g} \text{div} V \text{dvol} = \int_M \langle V, n \rangle \text{dvol}.$$

Für  $g$  konstant, folgt das direkt aus dem Divergenzsatz auf Quadern. Die Grundidee zum Beweis dieses Lemma ist wieder Fubini – man muss nur ein bisschen mehr machen:

*Beweis.* Sei  $Q = \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i]$ .

Wir bestimmen zunächst  $n$ :  $M$  besteht aus Teilen von  $\partial Q$ , wo jeweils  $\pm$  eines Standardbasisvektors der äußere Einheitsnormalenvektor ist, und aus  $\text{graph} g$ . Da  $F(u) = (u, g(u))$  eine Parametrisierung von  $\text{graph} g$  ist, bilden die Vektoren

$$\left\{ \left( e_i \in \mathbb{R}^{n-1}, \frac{\partial g}{\partial x_i}(u) \right)^T \in \mathbb{R}^n \mid i = 1, \dots, n-1 \right\}$$

für  $T_p M$  mit  $p = F(u)$  eine Basis. Der Vektor  $\tilde{n}(u) = \left( -\frac{\partial g}{\partial x_1}(u), \dots, -\frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(u), 1 \right)^T$  ist senkrecht auf allen diesen Basisvektoren und damit auf  $T_p M$ . Diesen Vektor müssen wir noch normalisieren, also  $n(p) = \frac{\tilde{n}(u)}{|\tilde{n}(u)|}$  setzen. Dieses  $n$  ist dann ein Einheitsnormalenvektor und, da er von  $\Omega_g$  wegzeigt (da letzte Koordinate positiv ist), der gesuchte äußere Einheitsnormalenvektor in  $p = F(u)$ .

Um die Behauptung nachzurechnen beginnen wir mit dem Anteil der rechten Seite der Gleichung, der von  $\text{graph} g$  kommt. Dort gilt nach dem Divergenzsatz

$$\int_{\text{graph } g} \langle V, n \rangle \text{dvol} = \int_Q \left( \sum_{i=1}^{n-1} -V_i(u, g(u)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(u) + V_n(u, g(u)) \right) \frac{\sqrt{|\det((D_u F)^T(D_u F))|}}{|\tilde{n}(u)|} \text{dvol}$$

Wir werden nun noch sehen, dass  $\sqrt{|\det((D_u F)^T(D_u F))|} = |\tilde{n}(u)|$  gilt: Es ist  $|\tilde{n}(u)|^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |\partial_i g(u)|^2$ . Da  $\tilde{n}(u) \perp \frac{\partial F}{\partial x_i}(u)$  ist, vgl. Seite 44,

$$|\det(D_u F, \tilde{n}(u))| = \sqrt{|\det((D_u F)^T(D_u F))|} |\tilde{n}(u)|$$

Außerdem ist

$$(D_u F, \tilde{n}(u)) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-1} & -(D_u g)^T \\ D_u g & 1 \end{pmatrix}$$

Zum Bestimmen der Determinante formen wir die letzte Zeile der Matrix um in 'letzte Zeile  $-\sum_{i=1}^{n-1} -\partial_i g(u) \cdot (i.\text{te Zeile})$ ' und erhalten dann für die letzte Zeile alles Nullen, nur der letzte Eintrag ist dann  $|\tilde{n}(u)|^2$ . Somit ist  $\det(D_u F, \tilde{n}(u)) = |\tilde{n}(u)|^2$  und somit  $\sqrt{|\det((D_u F)^T(D_u F))|} = |\tilde{n}(u)|$ .

Um die linke Seite der Behauptung zu berechnen betrachten wir die einzelnen Summanden der Divergenz einzeln. Hierbei sei  $(u, x_n = z) \in Q \times [0, c]$  und  $x_1, \dots, x_{n-1}$  seien die Koordinaten von  $u$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega_g} \frac{\partial V_n}{\partial z} \text{dvol} = \int_Q \left( \int_0^{g(u)} \frac{\partial V_n}{\partial z}(u, z) dz \right) \text{dvol}_u = \int_Q V_n(u, g(u)) \text{dvol}_u - \int_Q V_n(u, 0) \text{dvol}_u$$

Für  $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \text{dvol} &= \int_Q \left( \int_0^{g(u)} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(u, z) dz \right) \text{dvol}_u \\ &= \int_Q \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^{g(u)} V_i(u, z) dz \right) - V_i(u, g(u)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(u) \right) \text{dvol}_u \\ &= \int_{Q \cap \{x_i=b_i\}} \int_0^{g(u)} V_i(u_1, \dots, u_{i-1}, b_i, u_{i+1}, \dots, u_{n-1}, z) dz \text{dvol} \\ &\quad - \int_{Q \cap \{x_i=a_i\}} \int_0^{g(u)} V_i(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_{n-1}, z) dz \text{dvol} \\ &\quad - \int_Q V_i(u, g(u)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(u) \text{dvol}_u \end{aligned}$$

Alle grünen Terme ergeben in der Summe  $\int_{\Omega_g} \text{div } V \text{dvol}$ . Alle blauen Terme sind der Anteil von  $\int_M \langle V(u, g(u)), n(u) \rangle \text{dvol}_u$  der nicht von  $\text{graph } g$  kommt. Somit haben wir insgesamt

$$\int_{\Omega_g} \text{div } V \text{dvol} = \int_M \langle V(u, g(u)), n(u) \rangle \text{dvol}_u = \int_M \langle V, n \rangle \text{dvol}. \quad \square$$

## 1 Integration

*Beweis vom Divergenzsatz 1.5.13.* Wir zerlegen  $Q$ , derart in Teilquader, dass  $\Omega$  in jedem Teilquader die Form wie im letzten Lemma hat (geht immer - analog wie Satz 1.4.1). Dann wenden wir auf jeden Teilquader das letzte Lemma an. Die Summe aller dieser Formeln gibt den gesuchten Divergenzsatz, da alle Randintegrale, die vom Rand der Teilquader kommen und nicht schon Teil von  $\partial Q$  waren, zweimal mit unterschiedlichem Vorzeichen auftreten.  $\square$

**Beispiel 1.5.15.** Sei  $V(x) = x$  ein Vektorfeld im  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist  $\operatorname{div} V = 3$ . Sei  $\Omega = B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ . Dann ist  $\partial\Omega = S_r(0)$  mit äußerem Einheitsnormalenvektor  $n(x \in S_r(0)) = \frac{x}{r}$ .

Der Divergenzsatz liefert dann

$$\operatorname{vol} B_r(0) = \frac{1}{3} \int_{B_r(0)} \operatorname{div} V \, d\operatorname{vol} = \frac{1}{3} \int_{S_r(0)} \left\langle x, \frac{x}{r} \right\rangle d\operatorname{vol} = \frac{r}{3} \operatorname{vol} S_r(0).$$

So erhalten wir zum Beispiel noch einmal die Oberfläche der Kugel mit Radius  $r$  als  $\frac{3}{r} \operatorname{vol} B_r(0) = 4\pi r^2$ .

Genau die gleiche Rechnung funktioniert für die  $n$ -dimensionale Kugel:

$$\operatorname{vol}_n(B_r(0) \subset \mathbb{R}^n) = \frac{r}{n} \operatorname{vol}_{n-1} S_r(0).$$

D.h. ist  $\operatorname{vol}_n B_r(0) = c_n r^n$ , dann ist  $\operatorname{vol}_{n-1} S_r(0) = n c_n r^{n-1}$ , also  $\operatorname{vol}_{n-1} S_r(0) = \frac{\partial}{\partial r} (\operatorname{vol}_n B_r(0))$ .

Mittels des Divergenzsatzes können wir auch eine Verallgemeinerung des Rotationsatzes auf Quadern, Lemma 1.2.15, zeigen:

**Satz 1.5.16** (Satz von Stokes). *Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$  eine lokale Parametrisierung um  $p \in M$ . Sei  $K \subset U$  kompakt, so dass  $\partial K$  das Bild einer einfach geschlossenen glatten Kurve  $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$  ist, die  $\partial K$  entgegen des Uhrzeigersinns durchläuft.*

*Sei  $\Omega = F(K)$  und  $\gamma = F \circ \alpha$ . Sei ein Einheitsnormalenvektorfeld  $n: F(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch  $n(F(x, y)) = \frac{\partial_x F \times \partial_y F}{|\partial_x F \times \partial_y F|}$ .*

*Sei  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} V, n \rangle d\operatorname{vol} = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Zu den Wahlen von  $n$  und  $\alpha$ : Auch  $\frac{\partial_y F \times \partial_x F}{|\partial_x F \times \partial_y F|}$  ist ein Einheitsnormalenfeld, was zu einem anderen Vorzeichen im linken Integral führen würde. Läuft man die Kurve  $\alpha$  im Uhrzeigersinn durch, ändert sich das Vorzeichen des rechten Integrals. Die Wahlen bei  $n$  und  $\alpha$  sind also so getroffen, dass sie zusammenpassen und uns hier Gleichheit geben.

## 1.5 Integration in anderen Koordinaten

*Beweis.* Vorgehen: Übertragen der Integrale auf  $K$  bzw.  $\alpha$ , vgl. Abbildung 1.26. Dort kann man dann den Divergenzsatz auf ein geeignetes Vektorfeld anwenden, um die Gleichheit zu zeigen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} V, n \rangle \operatorname{dvol} &= \int_K \langle (\operatorname{rot} V) \circ F, n \circ F \rangle \sqrt{|\det (DF)^T (DF)|} \operatorname{dvol} \\ &\stackrel{\text{vgl. unter Def. 1.5.8}}{=} \int_K \langle (\operatorname{rot} V) \circ F, \partial_x F \times \partial_y F \rangle \operatorname{dvol}. \end{aligned}$$

Wir formen nun den Integranden um:

$$\begin{aligned} \langle (\operatorname{rot} V) \circ F, \partial_x F \times \partial_y F \rangle &= \sum_{i,j} ((\partial_i V_j - \partial_j V_i) \circ F) \partial_x F_i \partial_y F_j \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_j \partial_x (V_j \circ F) \partial_y F_j - \sum_i \partial_y (V_i \circ F) \partial_x F_i \\ &= \langle \partial_x (V \circ F), \partial_y F \rangle - \langle \partial_y (V \circ F), \partial_x F \rangle \\ &= \partial_x \langle (V \circ F), \partial_y F \rangle - \partial_y \langle (V \circ F), \partial_x F \rangle \\ &\quad - \langle (V \circ F), \partial_x \partial_y F \rangle + \langle (V \circ F), \partial_y \partial_x F \rangle \\ &= \operatorname{div} \underbrace{\langle (V \circ F), \partial_y F \rangle, -\langle (V \circ F), \partial_x F \rangle \rangle^T}_{=:W} \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir die Kettenregel bzw. totale Ableitung  $\partial_x(V \circ F) = \sum_{i=1}^3 (\partial_x V_i) \circ F) \partial_x F_i$  verwendet (und analog für den zweiten Summanden). Außerdem haben wir insbesondere benutzt, dass  $F$  zweimal stetig differenzierbar ist, somit  $\partial_y \partial_x F = \partial_x \partial_y F$  gilt und damit die Zeile vorm letzten Gleichheitszeichen gleich Null ist.

Auf  $K \subset \mathbb{R}^2$  können wir den Divergenzsatz anwenden und erhalten

$$\int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} V, n \rangle \operatorname{dvol} = \int_K \operatorname{div} W \operatorname{dvol} = \int_{\alpha} \langle W, N \rangle \operatorname{dvol} = \int_0^1 \langle W(\alpha(t)), N(\alpha(t)) \rangle |\alpha'(t)| dt$$

wobei  $|\alpha'(t)| N(\alpha(t)) = (\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t))^T$  ist, vgl. Abbildung 1.26 rechts. Der Rest folgt dann mit

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| \langle W(\alpha(t)), N(\alpha(t)) \rangle &= \langle (V \circ F)(\alpha(t)), \partial_y F(\alpha(t)) \rangle \alpha_2'(t) \\ &\quad + \langle (V \circ F)(\alpha(t)), \partial_x F(\alpha(t)) \rangle \alpha_1'(t) \\ &= \langle (V \circ F)(\alpha(t)), D_{\alpha(t)} F(\alpha'(t)) \rangle = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 1.5.17.** Mit Hilfe des Divergenz- und Rotationssatz können wir aus den Maxwell-Gleichungen, s. S. 23, Integralgleichungen machen. Z.B. folgt aus dem Gauß-Gesetz  $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ( $E$  das elektrische Feld,  $\rho$  die Ladungsdichte,  $\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante) mit dem Divergenzsatz für geeignetes  $\Omega$ , dass

$$\int_{\partial\Omega} \langle E, n \rangle \operatorname{dvol} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho \operatorname{dvol} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

# 1 Integration

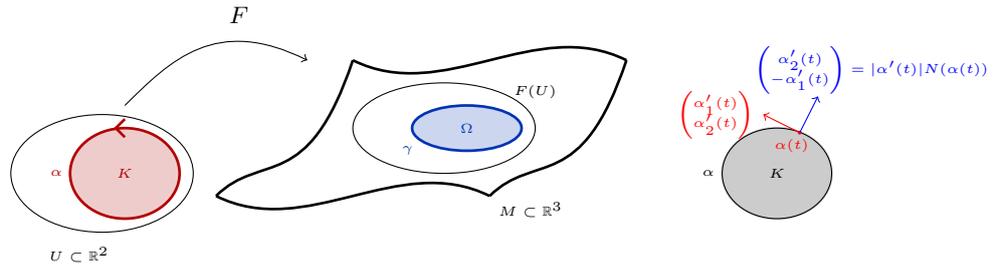


Abbildung 1.26: Abbildung zum Satz von Stokes links und rechts zu  $N(\alpha(t))$

mit  $Q$  die Gesamtladung in  $\Omega$  ist.

Schauen wir uns dies für den Spezialfall einer Punktladung in  $0 \in \mathbb{R}^3$  der Ladung  $q$  und  $\Omega = B_r(0)$ . Die Punktladung erzeugt ein elektrisches Feld  $E$ , welches aus Symmetriegründen rotationssymmetrisch sein muss, also die Form  $E(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{E}(r)\vec{e}_r$  hat (Hier ist  $\vec{e}_r = \frac{1}{r}(x_1, x_2, x_3)^T$  der äußere Einheitsnormalenvektor auf der Kugel.). Damit ist die linke Seite des Integrals gleich

$$\int_{\partial\Omega} \langle E, n \rangle d\text{vol} = \int_{S_r(0)} \mathcal{E}(r) d\text{vol} = \mathcal{E}(r)4\pi r^2$$

und damit ist  $\mathcal{E}(r) = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2}$ .

Als zweites Beispiel schauen wir uns das elektrische Feld stationärer Ladungen (und ohne externes zeitabhängiges magnetisches Feld an). Dann ist  $\text{rot } E = 0$ . Nach [2, Lem. 2.2.9] gibt es somit ein Potential  $\varphi$  mit  $E = \text{grad}\varphi$ . Es ist also  $\Delta\varphi := \text{rot grad } \varphi = 0$ . Man nennt  $\Delta$  den Laplace-Operator und man kann direkt nachrechnen, dass  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  ist. Die Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  gilt so erst mal nur, wo  $\varphi$  und damit  $E$  definiert war. Im Falle der Punktladung von oben, also in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Auch ist  $\varphi$  nicht eindeutig, sondern auch ' $\varphi + \text{Konstante}$ ' führt zum gleichen  $E$ -Feld. Für das Punktteilchen gilt  $\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ . Wenn man sich eine Ladungsverteilung  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als geeigneten Limes von einer Menge von Punktteilchen vorstellt, könnte man so das zugehörige Potential als das Potential eines Punktteilchens herleiten und würden

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(y)}{|x-y|} d\text{vol}_y$$

und somit

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(y)(x-y)}{|x-y|^3} d\text{vol}_y$$

erhalten.

Analog kann man Aussagen zum Magnetfeld ableiten: Es ist  $\text{div } B = 0$  (=keine magnetischen Monopole). Wir hatten in Lemma 1.2.16 gesehen, dass  $\text{div rot } V = 0$  ist (für  $V$  zweimal stetig differenzierbar). Aber es gilt auch die Umkehrung (Beweis

ähnlich wie bei 'Rotationsfreie Vektorfelder sind lokal Gradientenvektorfelder'): Es ist  $B = \text{rot } A$  für ein *Vektorpotential*  $A$ . Auch dieses  $A$  ist nicht eindeutig, sondern  $A - \text{grad } \psi$  liefert das gleiche  $B$ .\*

Betrachten wir nun einen geraden stromdurchflossenen Leiter (Radius  $r_0$ ). Die Stromdichte (sollte vielleicht besser Stromflächendichte heißen) sei konstant  $j(0, 0, x_3) = j_0 e_3$  im Leiter und außerhalb gleich Null. Das heißt der Strom durch den Leiter ist gleich:  $I_0 = j_0 \pi r_0^2$ . Für stationäre Ströme ist  $\text{rot } B = \mu_0 j$ . D.h. es wird ein Magnetfeld erzeugt. Aus Symmetriegründen muss dieses rotationssymmetrisch bzgl. der  $z$ -Achse und bei konstantem Strom translationsinvariant in  $z$ -Richtung sein, also in Zylinderkoordinaten der Form  $B(r, \varphi, z) = \mathcal{B}_1(r)(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T + \mathcal{B}_2(r)e_3 + \mathcal{B}_3(r)e_r$  sein. Nach dem Rotationssatz ist nun

$$\int_{B_r(0)} \langle \text{rot } B, e_3 \rangle \text{dvol} = \int_{\gamma} \langle B(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Für  $r > r_0$  ist die linke Seite gleich  $\int_D \langle \text{rot } B, e_3 \rangle \text{dvol} = \int_{B_{r_0}(0)} \langle \mu_0 j_0 e_3, e_3 \rangle \text{dvol} = \mu_0 I_0$  und die rechte Seite  $2\pi \mathcal{B}_1(r)r$ . Also ist  $\mathcal{B}_1(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$ . Es muss dann  $\mathcal{B}_2(r) = \mathcal{B}_3(r) = 0$  sein, da sonst  $B$  nicht divergenzfrei wäre. Also ist  $B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T$  das Magnetfeld außerhalb eines stromdurchflossenen Leiters. Ein zugehöriges Vektorpotential  $A$  ist  $A(r, \varphi, z) = -\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} (0, 0, \ln r)^T$ .

---

\*Wie auch die Wahlfreiheit beim Potential  $\varphi$  oben, nennt man das eine *Eichfreiheit*.



## 2 Funktionentheorie

In diesem Abschnitt der Vorlesung wollen wir uns der Analysis von komplexen Funktionen beschäftigen, die komplex differenzierbar sind (s.u.). Solche Funktionen haben wesentlich restriktivere Eigenschaften, als man es von reeller Differenzierbarkeit gewohnt ist. Dies wird uns z.B. auf den Cauchy-Integralsatz führen, mit dem komplexe Kurvenintegrale solcher komplex differenzierbaren Funktionen, dann nur durch Informationen berechnet werden können, welche Art von Singularitäten die Funktion hat und wie die Kurve sich um diese Singularitäten windet. Ein konkretes Beispiel davon haben schon in ÜA 8.ii berechnet. Um diesen Cauchy-Integralsatz dann zu beweisen, wird auch der Divergenzsatz aus dem letzten Kapitel wieder zum Einsatz kommen.

### 2.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Eine Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kann durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil auch immer als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  begriffen werden. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z = x + iy) &= z^2 & (x, y)^T &\mapsto (x^2 - y^2, 2xy)^T \\ f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) &= \bar{z} & (x, y)^T &\mapsto (x, -y)^T. \end{aligned}$$

Als Funktionen von  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sind beide Funktionen differenzierbar mit

$$D_{(x,y)}f_1 = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad D_{(x,y)}f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier sind  $D_{(x,y)}f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wie immer,  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen.

Man sagt zur Unterscheidung zur komplexen Differenzierbarkeit, die wir gleich definieren:  $f_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist *reell differenzierbar*.

Andererseits kann man den Differenzierbarkeitsbegriff von Analysis 1 auch anders auf komplexe Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  verallgemeinern, indem man in der Definition aus Analysis 1 'einfach jedes  $\mathbb{R}$  durch ein  $\mathbb{C}$  ersetzt'.

**Definition 2.1.1.** Eine Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist in  $z_0 \in \mathbb{C}$  *komplex differenzierbar*, wenn es ein  $a \in \mathbb{C}$  mit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a.$$

Dann ist  $f'(z_0) = a$  die *komplexe Ableitung* von  $f$  in  $z_0$ .

## 2 Funktionentheorie

Das funktioniert, da  $\mathbb{C}$  ein Körper ist, und wir somit dort eine Multiplikation haben. Beim  $\mathbb{R}^n$  ginge das nicht (Man kann nicht durch Vektoren dividieren).

Ganz analog wie in Analysis 1 erhalten wir die lineare Approximationseigenschaft, also, dass  $f$  in  $z_0$  genau dann komplex differenzierbar ist, wenn

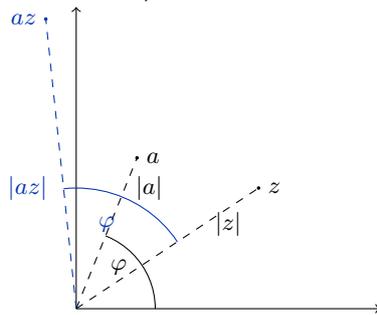
$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ah + o(|h|) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Hierbei bedeutet für  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dass  $g(z) = o(|z|)$  gilt, falls  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{|z|} = 0$  gilt – also wie in Analysis 1 nur dieses Mal mit Grenzwert in den komplexen Zahlen.

Die naheliegende Frage ist nun: **Ist für eine Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar und reell differenzierbar das gleiche?**

Dazu halten wir erst einmal fest: In Analogie zu Differenzierbarkeit in  $\mathbb{R}^n$  können wir  $f'(z_0): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto az$ , wieder als lineare Abbildung auffassen – jedoch dieses mal als  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung.

Jede  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , also jede Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $a$ , lässt sich als Multiplikation mit einer reellen  $2 \times 2$ -Matrix schreiben – also als  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Sei  $a = |a|e^{i\varphi}$  die Darstellung von  $a$  in Polarkoordinaten. Dann entspricht Multiplikation von  $z \in \mathbb{C}$  mit  $a$  der Streckung mit  $r$  und einer Drehung um den Winkel  $\varphi$  – also einer *Drehstreckung*, vgl. [1, Abschnitt 3.9.2]:



Sei  $z = x + iy = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist

$$a \cdot z = |a| \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aus  $a = f'(z_0)$  erhält man mittels obiger Gleichheit, dass  $f'(z_0)$  als reelle  $2 \times 2$ -Matrix die Form  $|a| \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}$ .

Ist  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar, dann ist

$$\partial_x f(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Analog:  $\partial_y f(z_0) = i f'(z_0)$ . Also ist  $f$  als  $f(x, y) = (\operatorname{Re} f(x, y), \operatorname{Im} f(x, y))^T$  verstanden in  $(x_0, y_0)$  ( $z_0 = x_0 + iy_0$ ) partiell differenzierbar. Es ist sogar reell differenzierbar\* die

\*Das sieht man z.B. in dem man

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|) \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

mit Real- und Imaginärteil schreibt und somit die analoge Gleichung erhält mit der Funktion  $o(|h|)$  als Vektor geschrieben, womit es aber noch immer das gewünschte Verhalten bei  $|h| \rightarrow 0$  hat.

mit Jacobimatrix

$$D_{(x_0, y_0)} f = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \partial_x f(x, y) & \operatorname{Re} \partial_y f(x, y) \\ \operatorname{Im} \partial_x f(x, y) & \operatorname{Im} \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}$$

ist.

Somit ist  $f'(z_0)$  aufgefasst als Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  gleich  $D_{z_0} f$ . D.h. jede komplex differenzierbare Funktion ist auch reell differenzierbar (und damit insbesondere auch stetig).

Die Rückrichtung stimmt jedoch nicht: Mit obigem sehen wir auch, dass eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  dann und nur dann zu einer Drehstreckung gehört und damit der Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht, wenn gilt:  $a_{11} = a_{22}$  und  $a_{12} = -a_{21}$  gilt. Auf dem Level der Jacobimatrix müssen also die Gleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

– die *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen* – gelten, wobei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y)^T \mapsto (u(x, y), v(x, y))^T$  ist.

Also ist nicht jedes  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , welches reell differenzierbar ist auch komplex differenzierbar. Von unseren zwei Beispielen vom Anfang ist  $f_1(z) = z^2$  komplex differenzierbar,  $f_2(z) = \bar{z}$  hingegen nicht. Es gilt:

**Lemma 2.1.2.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen, sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  genau dann komplex differenzierbar in  $z_0 \in \Omega$ , wenn  $f$  dort (als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ ) reell differenzierbar ist und in  $z_0$  die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten.*

*Beweisskizze.* Die Richtung  $\implies$  haben wir im Großen und Ganzen oben nachgerechnet. Dort haben wir gesehen, dass  $f$  dann zumindest partiell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten. Reell differenzierbar folgt dann wegen der speziellen Form der Jacobimatrix durch direktes Nachrechnen oder wie in der letzten Fußnote.

Für die Rückrichtung benutzt man, dass nach obiger Rechnung die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen implizieren, dass  $D_{(x_0, y_0)} f \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \sim a \cdot (h_1 + ih_2)$  für eine komplexe Zahl  $a \in \mathbb{C}$  gilt (Hierbei ist  $\sim$  die Standardidentifikation von  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$ ). Reell differenzierbar bedeutet  $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + D_{(x_0, y_0)} f \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(|(h_1, h_2)|)$ . Einsetzen in die Definition von komplex differenzierbar liefert die Behauptung.  $\square$

Komplexe Differenzierbarkeit ist also eine stärkere Forderung als reell differenzierbar.

Es lohnt sich komplexe Differenzierbarkeit anzuschauen, weil der Fakt, dass  $\mathbb{C}$  ein Körper ist, zu besseren Eigenschaften führt:

Summen, Produkte und Quotienten komplex differenzierbarer Funktionen sind wieder komplex differenzierbar, solange der Nenner des Quotienten keine Nullstellen hat. Auch die Hintereinanderausführung von komplex differenzierbaren Funktionen sind wieder komplex differenzierbar. Das folgt direkt aus der Definition von komplex differenzierbar und den Rechenregeln für konvergente Folgen, wie in Analysis 1 bei reell differenzierbar [1, S.44]. Die Rechenregeln für die Ableitung bleiben die gleichen:

**Beispiel 2.1.3.**

- (i)  $f(z) = z$  ist komplex differenzierbar, da  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1$ . Damit sind auch komplexe Polynome  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  für  $a_k \in \mathbb{C}$  (da durch endliche Produkte und Summen aus  $f(z) = z$  gebaut) überall komplex differenzierbar mit  $p'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$ .
- (ii)  $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$ ,  $m \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , ist in allen  $z \neq a$  komplex differenzierbar mit  $f'(z) = -m \frac{1}{(z-a)^{m+1}}$ .
- (iii)  $f(z) = e^{iz}$  ist komplex differenzierbar mit  $f'(z) = ie^{iz}$ . Es ist  $u(x, y) = e^{-y} \cos x$  und  $v(x, y) = e^{-y} \sin x$ . Damit gilt  $\partial_x u = -e^{-y} \sin x = \partial_y v$  und  $\partial_y u = -e^{-y} \cos x = -\partial_x v$ . Also erfüllt  $f$  die Cauchy-Riemann-Differentialgleichung und ist somit in allen  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar.

**Definition 2.1.4.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen. Sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann heißt  $f$  in  $z_0$  *holomorph*, wenn es eine offene Umgebung  $U$  um  $z_0$ , so dass  $f$  in allen Punkten von  $U$  komplex differenzierbar ist. Ist  $\Omega = \mathbb{C}$  und  $f$  holomorph, d.h. holomorph in allen  $z \in \mathbb{C}$ , dann nennen wir  $f$  eine *ganze Funktion*.

In einem Punkt ist holomorph sein also mehr als komplex differenzierbar. Andererseits bedeuten die Aussagen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist komplex differenzierbar und  $f$  ist holomorph dasselbe (für  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen).

## 2.2 Cauchy Integralformel

Sei  $f(z) = u(z) + iv(z)$  für  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Dann folgt aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, dass  $f$  genau dann holomorph ist, wenn  $V(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$  divergenz- und rotationsfrei ist.

**Satz 2.2.1** (Cauchy Integralsatz). Sei  $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $D \subset \mathbb{C}$  mit  $\bar{D} \subset \Omega$  und  $\partial D = \text{Bild } \gamma$  für eine einfach geschlossene stetig differenzierbare Kurve  $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die  $\partial D$  im mathematisch positiven Sinne durchläuft. Dann ist

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

ist.

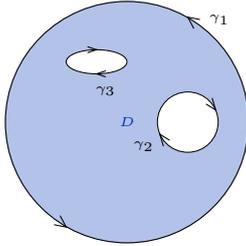
*Beweis.* ÜA 38 – dort zeigen wir diesen Satz durch Anwendung des Divergenzatz auf geeignete Vektorfelder.\* □

---

\*Für die Verwendung des Divergenzatzes brauchen wir eigentlich, dass das Vektorfeld stetig differenzierbar ist. D.h. eigentlich machen wir dann in diesem Beweis noch die Zusatzannahme, dass die Ableitung von  $f$  wieder stetig ist. Das kann man umgehen, aber wir ignorieren das hier. (Das kann man reparieren, indem man zeigt, dass aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen direkt das Theorem von Green (=Divergenzatz in 2D) folgt.).

## 2.2 Cauchy Integralformel

**Notation:** Zukünftig schreiben wir oft einfach direkt  $\int_{\partial D} f dz$  für  $D \subset \mathbb{C}$  offen und beschränkt und meinen damit folgendes: Hat  $\partial D$  nur eine Zusammenhangskomponente, wird der Rand von  $D$  einmal im mathematisch positiven Sinne durch eine stückweise differenzierbare Kurve durchlaufen. Hat der Rand von  $\partial D$  mehrere Zusammenhangskomponenten, vgl. Bild, wird der Rand so durchlaufen, dass das Gebiet  $D$  immer links von der Durchlaufrichtung liegt (Der erste Fall mit nur einer Zusammenhangskomponente des Randes ist ein Spezialfall davon). Die Durchlaufrichtung ändert nur das Vorzeichen von komplexen Kurvenintegralen, vgl. Abschnitt 1.1.4.



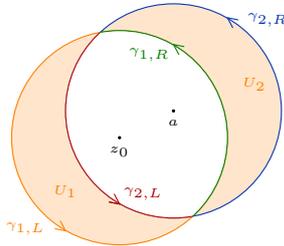
Im Bild schließe  $\gamma_i$  jeweils die offene Menge  $U_i$  ein. Damit ist  $D = U_1 \setminus (\bar{U}_2 \cup \bar{U}_3)$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f dz &= \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_3} f dz \\ &= \int_{\partial U_1} f dz - \int_{\partial U_2} f dz - \int_{\partial U_3} f dz \end{aligned}$$

**Beispiel 2.2.2.** In Beispiel 1.1.13 haben wir berechnet:  $\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i$ . Sei nun  $a \in B_r(z_0)$ . Wir interessieren uns für  $\int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta$ . Ist  $r < |z_0 - a|$ , dann ist dieses Integral Null nach dem Cauchy-Integralsatz. Wir interessieren uns nun für  $r > |z_0 - a|$ , also die Situation wie im Bild. Anstatt zu versuchen das komplexe Kurvenintegral direkt zu berechnen, wollen wir es mittels des Cauchy-Integralsatzes auf das letzte Beispiel zurückführen:

Es ist  $\frac{1}{z - z_0}$  überall holomorph außer in  $z_0$ . Damit gilt nach dem Cauchy-Integralsatz:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial U_1} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{\gamma_{1,L}} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta - \int_{\gamma_{2,L}} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta \\ 0 &= \int_{\partial U_2} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta - \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta \end{aligned}$$



und somit

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta &= \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta + \int_{\gamma_{2,L}} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta \\ &= \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta + \int_{\gamma_{1,L}} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta \\ &= \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i. \end{aligned}$$

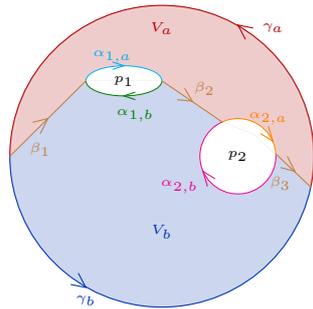
**Folgerung 2.2.3.** Sei  $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und auf  $\Omega \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  holomorph. Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen mit  $\bar{D} \subset \Omega$  und  $\partial D$  parametrisierbar durch eine stetig differenzierbare Kurve. Seien  $p_i \notin \partial D$  und  $p_{k+1}, \dots, p_n \notin D$ . Wähle  $U_i \subset \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , offen und paarweise disjunkt derart, dass  $p_i \in U_i$ ,  $\bar{U}_i \subset D$  und sich  $\partial U_i$  mittels einfach

## 2 Funktionentheorie

geschlossener stückweise differenzierbare Kurven parametrisieren lassen. Dann ist

$$\int_{\partial D} f dz = \sum_{i=1}^k \int_{\partial U_i} f dz$$

*Beweisidee:* Die Idee ist es diesen Satz auf den Cauchy-Integralsatz zurückzuführen. Wir zeigen die Idee hier nur am Bild. Auf  $V_a$  und  $V_b$  und deren Rand ist die Funktion holomorph und damit gilt dort der Cauchy-Integralsatz, also ist (Die Vorzeichen tracken die Durchlaufrichtung.):



$$\left( \int_{\gamma_a} + \int_{\beta_1} + \int_{\alpha_{1,a}} + \int_{\beta_2} + \int_{\alpha_{2,a}} + \int_{\beta_3} \right) f dz = 0$$

$$\left( \int_{\gamma_b} - \int_{\beta_3} + \int_{\alpha_{2,b}} - \int_{\beta_2} + \int_{\alpha_{1,b}} - \int_{\beta_1} \right) f dz = 0$$

In der Summe erhalten wir genau

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f dz &= - \left( \int_{\alpha_{1,a}} + \int_{\alpha_{1,b}} + \int_{\alpha_{2,a}} + \int_{\alpha_{2,b}} \right) f dz \\ &= \int_{\partial U_1} f dz + \int_{\partial U_2} f dz. \end{aligned}$$

Genauso funktioniert auch der allgemeine Fall.  $\square$

Für den Cauchy-Integralsatz ist es essentiell, dass  $f$  auf ganz  $\bar{D}$  holomorph ist: Die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph und  $\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$  (also nicht Null), vgl. Beispiel 1.1.13. Dies wird auch in folgender Verallgemeinerung abgebildet:

**Satz 2.2.4** (Cauchysche Integralformel). Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen mit  $z_0 \in \Omega$  und sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $r > 0$ , so dass  $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$  ist. Dann gilt für alle  $z \in B_r(z_0)$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

*Beweis.* Hier ist der Integrand  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  auf  $\Omega \setminus \{z\}$  als Quotient zweier dort holomorpher Funktionen, wo der Nenner keine Nullstelle hat, selbst wieder holomorph. Aber nicht in  $z$ . Wir definieren

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Da  $f$  komplex differenzierbar ist, ist  $g$  selbst wieder holomorph. Damit gilt nach dem Cauchy Integralsatz

$$0 = \int_{\partial B_r(z_0)} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Mit Beispiel 1.1.13 ist  $\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$  für  $z \in B_r(z_0)$  und somit folgt die Cauchy Integralformel.  $\square$

**Beispiel 2.2.5.** Es ist  $f(z) = z^2$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Damit ist nach letztem Satz:  $z_0^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\zeta^2}{\zeta - z_0} d\zeta$ . Wir überprüfen das nochmal durch direktes Ausrechnen des komplexen Kurvenintegrals: Sei  $\gamma = z_0 + re^{i\varphi}$ . Dann ist

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\zeta^2}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{(z_0 + re^{i\varphi})^2}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = 2\pi iz_0^2$$

(da  $\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi} d\varphi = 0$  für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ).

## 2.3 Erste Anwendungen

Wir werden in diesem Abschnitt einige Anwendungen der Cauchy-Integralformel sehen. Z.B. dass holomorphe Funktionen automatisch unendlich oft komplex differenzierbar sind.

Dazu zuerst ein Hilfsresultat:

**Satz 2.3.1.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stückweise stetig differenzierbare Kurve und sei  $f: \text{Bild } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Sei für  $m \in \mathbb{N}$

$$F_m: z \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild } \gamma \mapsto \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^m} d\zeta \in \mathbb{C}.$$

Dann ist  $F_m$  eine holomorphe Funktion mit  $F'_m = mF_{m+1}$ .

Bevor wir diesen Satz beweisen, wenden wir ihn gleich einmal an:

**Folgerung 2.3.2** (Verallgemeinerte Cauchy-Integralformel). Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  mit  $\bar{U} \subset \Omega$  und  $\gamma$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, die  $\partial U$  einmal mathematisch positiv durchläuft. Dann ist  $f$  unendlich oft differenzierbar und für  $n \geq 1$  und für  $z \in U$  gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Diese Folgerung zeigt, wie viel stärker komplex differenzierbar als reell differenzierbar ist. Denn es gibt natürlich reelle Funktion, die einmal aber nicht zweimal differenzierbar sind.

*Beweis.* Wir verwenden Satz 2.3.1 für die holomorphe Funktion  $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist  $F_1|_U = \frac{1}{2\pi i} f|_U$  nach dem Cauchy Integralsatz. Nach dem letzten Satz ist damit  $f$  auf  $U$  unendlich oft differenzierbar, und es gilt für  $z \in U$ :

$$f^{(n)}(z) = n!F_{n+1}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad \square$$

## 2 Funktionentheorie

*Beweisskizze von Satz 2.3.1.* Stetigkeit von  $F_m$  folgt aus den Eigenschaften von Parameterintegralen [2, Satz 2.1.1]. Genauso ist

$$\begin{aligned} \frac{F_m(z) - F_m(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma} f(\zeta) \left( \frac{1}{(\zeta - z)^m} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^m} \right) d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1-i} (\zeta - z_0)^i} d\zeta \end{aligned}$$

auch wieder stetig in  $z_0$ . Die letzte Gleichheit benutzt  $\sum_{i=1}^m q^i = \frac{q(1-q^m)}{1-q}$  für  $q = \frac{\zeta-z}{\zeta-z_0}$ . D.h.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_m(z) - F_m(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{i=1}^m \lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1-i} (\zeta - z_0)^i} d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta = mF_{m+1}(z) \end{aligned}$$

Zum vorletzten Schritt: Man nachrechnen kann, dass die Folge der Integranden gleichmäßig konvergiert. Damit dürfen Limes und Integral hier vertauscht werden [1, Satz 4.5.15].

Also ist  $F'_m = mF_{m+1}$ . □

**Folgerung 2.3.3** (Cauchy Ungleichung). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in \Omega$  und  $B_R(z_0) \subset \Omega$ . Dann gilt für  $n \in \mathbb{N}$*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \partial B_R(z_0)} |f(z)|.$$

*Beweis.* ÜA 41 – Anwendung von Folgerung 2.3.2 □

**Folgerung 2.3.4** (Satz von Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

*Beweis.* Benutzen wir die Cauchy-Ungleichung für  $n = 1$  und  $R \rightarrow \infty$ , folgt direkt  $f' = 0$  und damit  $f$  konstant. □

Die vorletzte Folgerung impliziert insbesondere, dass für die Koeffizienten der Taylorreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  einer Funktion  $f$ , welche holomorph in  $z_0$  ist, die Abschätzungen  $|a_k| \leq \frac{c}{\epsilon^k}$  für  $\epsilon > 0$  (klein genug, so dass  $f$  auf  $\overline{B_{\epsilon}(z_0)}$  holomorph ist) und  $c = \max_{\partial B_{\epsilon}(z_0)} |f(z)|$ . Damit ist

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right| \leq c \sum_{k \geq 0} \epsilon^{-k} |z - z_0|^k < \infty$$

(wegen  $|z - z_0| < \epsilon$  und der Konvergenz der geometrischen Reihe). Die Taylorreihe einer holomorphen Funktion konvergiert also immer. Was wir jetzt noch nicht wissen ist, ob die Taylorreihe auch wieder gegen die ursprüngliche holomorphe Funktion konvergiert. Für reelle Funktionen kann das ja auch schiefgehen. Bei holomorphen Funktionen ist die Antwort aber ja:

**Satz 2.3.5.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $a \in \Omega$ . Dann gilt für alle  $r > 0$  mit  $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$ , dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$$

für alle  $z \in B_r(a)$ .

*Beweisskizze.* Sei  $\rho < r$ . Nach Folgerung 2.3.2 gilt  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$  für  $z \in B_\rho(a)$ . Damit gilt für alle  $z \in B_\rho(a)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta.$$

Da  $f$  holomorph auf  $B_r(a)$  und damit stetig ist, ist  $f$  auf  $\overline{B_\rho(a)}$  beschränkt, sagen wir durch  $C$ . Damit ist der Integrand beschränkt durch

$$\left| \frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}} \right| \leq \frac{C}{\rho} q^k$$

für  $q := \frac{|z-a|}{\rho}$ . Wegen  $q < 1$ , folgt mit dem Majorantenkriterium, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}$  gleichmäßig in  $\zeta \in \text{Bild } \gamma$  konvergiert und somit können wir in obiger Gleichheit Integral und unendliche Summe vertauschen [1, Satz 4.5.15]. Also gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^k} d\zeta \\ &\stackrel{|z-a| \leq |\zeta-a|}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \stackrel{\text{Satz 2.2.4}}{=} f(z). \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 2.3.6.**

- (i)  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- (ii) Taylorreihe von  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  ist  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ . Mit Analysis I sehen wir: Quotientenkriterium zeigt, dass die Reihe für alle  $|z| < 1$  konvergiert. Dass dort diese Reihe auch gegen  $f(z)$  konvergiert, müssten wir noch extra zeigen (hier nicht so schwierig). Aber da die Funktion holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$  ist, sagt uns der letzte Satz, dass für alle  $B_r(0) \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ , also für  $|z| < 1$ , diese Taylorreihe nicht nur konvergiert sondern auch wirklich gegen  $f(z)$  konvergiert.

Ein Gebiet in  $\mathbb{C}$  sei eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

**Satz 2.3.7** (Identitätssatz). Seien  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und seien  $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

## 2 Funktionentheorie

(i)  $f = g$ .

(ii) Die Menge  $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$  hat einen Häufungspunkt.

(iii) Es gibt ein  $z_0 \in G$  mit  $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ .

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii) ist klar. (ii)  $\implies$  (iii): Da  $f$  und  $g$  holomorph sind, sind sie unendlich oft differenzierbar. Sei  $z_0 \in G$  der Häufungspunkt aus (ii) und  $z_i \in \{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$  mit  $z_i \rightarrow z_0$ . Wir wollen durch Widerspruch zeigen, dass für  $z_0$  (iii) gilt: Dazu sei  $m \in \mathbb{N}$  das kleinste  $m$  mit  $f^{(m)}(z_0) \neq g^{(m)}(z_0)$ . Dann gilt nach Taylorentwicklung

$$(f - g)(z) = (z - z_0)^m \left( \frac{(f - g)^{(m)}(z_0)}{m!} + O(z - z_0) \right) =: (z - z_0)^m h(z).$$

Wegen  $f^{(m)}(z_0) \neq g^{(m)}(z_0)$  ist  $h$  in einer Umgebung von  $z_0$  ungleich Null und damit auch  $h(z_i) \neq 0$  für  $i$  groß genug. Doch dann folgt für solche  $i$  nach obiger Gleichheit  $f(z_i) \neq g(z_i)$  und gibt den Widerspruch.

(iii)  $\implies$  (i): Die Taylorreihen von  $f$  und  $g$  um  $z_0$  stimmen überein. Nach Satz 2.3.5 sind diese Potenzreihen auf allen Bällen  $B_r(z_0) \subset G$  gleich der holomorphen Funktion. Also ist auf  $B_r(z_0)$  schon  $f = g$  und in allen Punkten aus  $B_r(z_0)$  gilt wieder (iii). Iteratives Ausführen dieses Argumentes liefert dann  $f = g$  auf ganz  $G$  (da  $G$  offen und zusammenhängend).  $\square$

## 2.4 Ausblick auf Riemannsche Flächen/mehrwertige Funktionen

Wir wollen nun schauen, ob wir für einige Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}$  oder einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  analytische Fortsetzung dieser Funktion finden können. Das bedeutet, wir fragen: Gibt es eine offene Umgebung  $\Omega \subset \mathbb{C}$  von  $I$  und eine holomorphe Funktion  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F|_I = f$ . Für Polynome,  $e^x$ ,  $\sin x$  und  $\cos x$  geht das, wie wir schon gesehen haben, indem man einfach ' $x$  durch  $z$  ersetzt', vgl. Beispiel 2.1.3 und ÜA36.ii. Der Identitätssatz 2.3.7 sagt uns, dass diese Fortsetzungen eindeutig sind. Auch rationale Funktionen kann man so erweitern und erhält eine Funktion, die in allen Punkten bis auf den Nullstellen des Nenners holomorph ist.

Was wir als notwendige Bedingung zur Existenz einer analytischen Erweiterung von  $f$  wissen, vgl. Folgerung 2.3.2, dass  $f$  glatt sein muss und ihre Taylorreihe gegen  $f$  konvergiert (solche  $f$  nennt man *reell analytisch*).

Als ein weiteres Beispiel wollen wir von  $f(x \in (0, \infty)) = \sqrt{x}$  eine analytische Fortsetzung finden: Betrachten wir die Gleichung  $z^2 = w$  in  $\mathbb{C}$ . Dann hat diese Gleichung für alle  $w \neq 0$  genau zwei Lösungen: Ist  $w = re^{i\varphi}$  für  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ , dann ist  $z = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  und  $z = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}}$  eine Lösung. Die erste Lösung  $F(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  stimmt auf der positiven  $x$ -Achse mit  $f$  überein und ist somit (da holomorph) eine analytische Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ . Diese analytische Fortsetzung kann nicht noch auf einen

## 2.4 Ausblick auf Riemannsche Flächen/mehrwertige Funktionen

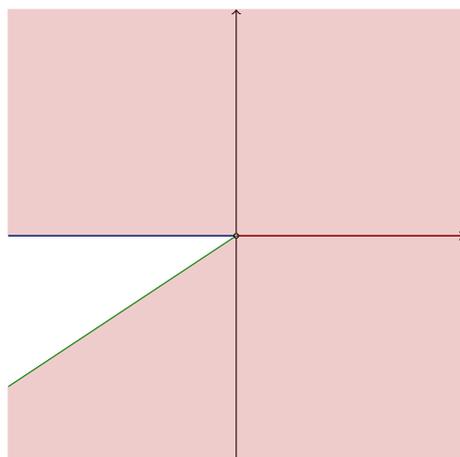


Abbildung 2.1:  $f(x) = \sqrt{x}$  ist auf der positiven reellen Achse definiert. Die analytische Fortsetzung  $F(z = re^{i\varphi}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  für  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  von  $f$  ist definiert auf  $\mathbb{C}$  ohne den blauen Strahl. Die analytische Fortsetzung  $F_2(z = re^{i\varphi}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  für  $\varphi \in (a - 2\pi, a)$  von  $f$  ist definiert auf  $\mathbb{C}$  ohne den blauen Strahl. Auf der roten Menge stimmen beide Fortsetzungen überein, auf der weißen Menge unterscheiden sie sich ums Vorzeichen.

größeren Definitionsbereich erweitert werden. Dann holomorphe Funktionen sind immer stetig und würde  $F$  auf ein  $x \leq 0$  holomorph erweitert werden können, dann müsste unter anderem  $F(\sqrt{|x|}e^{i(-\pi+\epsilon)}) - F(\sqrt{|x|}e^{i(\pi-\epsilon)})$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen Null gehen. Dies ist aber nicht der Fall:

$$F(\sqrt{|x|}e^{i(-\pi+\epsilon)}) - F(\sqrt{|x|}e^{i(\pi-\epsilon)}) = -2i\sqrt{|x|} \cos \frac{\epsilon}{2} \rightarrow -2i\sqrt{|x|} \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0.$$

Die von uns hier gefundene analytische Fortsetzung von  $f(x) = \sqrt{x}$  ist aber nicht die einzige analytische Fortsetzung. In  $w = re^{i\varphi}$  hätten wir auch  $\varphi \in (a, a + 2\pi)$  mit  $a \in (-2\pi, 0)$  wählen können. Dann wäre  $\varphi = 0$  enthalten und dort  $w = r$ , und  $z = \sqrt{r} = f(r)$  eine Lösung. Machen wir das gleiche wie oben nun für diese Wahl des Bereiches von  $\varphi$ , erhalten wir als analytische Fortsetzung von  $f$  nun wieder  $F_2(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  allerdings mit Definitionsbereich  $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} | r > 0\}$ , vgl. Abbildung 2.1. Auch hier lässt sich mit analogem Argument wie oben die Erweiterung nicht auf den fehlenden Strahl holomorph fortsetzen.

Beide Erweiterungen stimmen auf  $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\varphi} | r > 0, \varphi \in (a - 2\pi, \pi)\}$  überein (sollte nach dem Identitätssatz auch so sein). Auf  $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\varphi} | r > 0, \varphi \in (\pi, 2\pi - a)\}$  unterscheiden Sie sich durch das Vorzeichen: Sei  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{re^{i\varphi} | r > 0, \varphi \in (\pi, 2\pi - a)\}$ . Dann ist  $F(z) = \sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2} - \pi)} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  und  $F_2(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ .

Es gab aber oben noch eine zweite Lösung von  $z^2 = w$  bei gegebenen  $w \neq 0$ . Auf der positiven  $x$ -Achse entspricht diese Lösung der Funktion  $x \mapsto -\sqrt{x}$ . Auch diese kann

## 2 Funktionentheorie

man auf ganz  $\mathbb{C}$  ohne einen gewählten Strahl der von Null ausgeht fortsetzen: Z.B:  $F_3(z) = -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{re^{ia} | r > 0\}$  für  $a \neq 0$ . Vergleicht man nun (für  $a \neq \pi$ )  $F_3$  mit  $F$  dann stimmen diese Funktionen auf  $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\varphi} | r > 0, \varphi \in (\pi, 2\pi - a)\}$  überein und auf  $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\varphi} | r > 0, \varphi \in (a - 2\pi, \pi)\}$  unterscheiden sie sich durch das Vorzeichen.

Diese Überlegungen legen nahe, dass man diese Lösungen alle 'zusammenkleben kann' - Man erhält so eine mehrwertigen (=multi-valued) Funktion  $w \mapsto \sqrt{w}$  (mehrwertig, weil man hier alle Lösungen von  $w = z^2$  als Bild von  $w$  nimmt. In diesem Fall also i.A. zwei. Man kann diese mehrwertige Funktion auch anders auffassen, nämlich als Teilmenge von  $\mathbb{C}^2$  mittels:  $M = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 = w\} \subset \mathbb{C}^2$ . Als solche ist es eine Untermannigfaltigkeit\* von  $\mathbb{C}^2$  - diese wird dann *Riemannsche Fläche* genannt - vgl. Abbildung 2.2.

Ähnlich kann man auch den Logarithmus  $x \in (0, \infty) \mapsto \ln x$  analytisch fortsetzen. Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion von der Exponentialfunktion. D.h. als Riemannsche Fläche wird hier  $\{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid w \neq 0, w = e^z\}$  herauskommen. Wegen  $e^z = e^{z+i2\pi k}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ , gibt es für die Gleichung  $w = e^z$  bei gegebenen  $w \neq 0$  unendlich viele Lösungen, die sich um ganzzahlige Vielfache von  $i2\pi$  unterscheiden. Als mehrwertige Funktion  $w \mapsto \ln w$  betrachtet, hat ein  $w(\neq 0)$  dann unendlich viele Bilder.

---

\*Sowohl eine reelle zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn man  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$  identifiziert (sieht man mit dem Kriterium vom regulären Wert, als auch als komplexe Untermannigfaltigkeit vom  $\mathbb{C}^2$ . Letzteres haben wir nicht definiert, geht aber sehr analog wie im reellen.

## 2.4 Ausblick auf Riemannsche Flächen/mehrwertige Funktionen

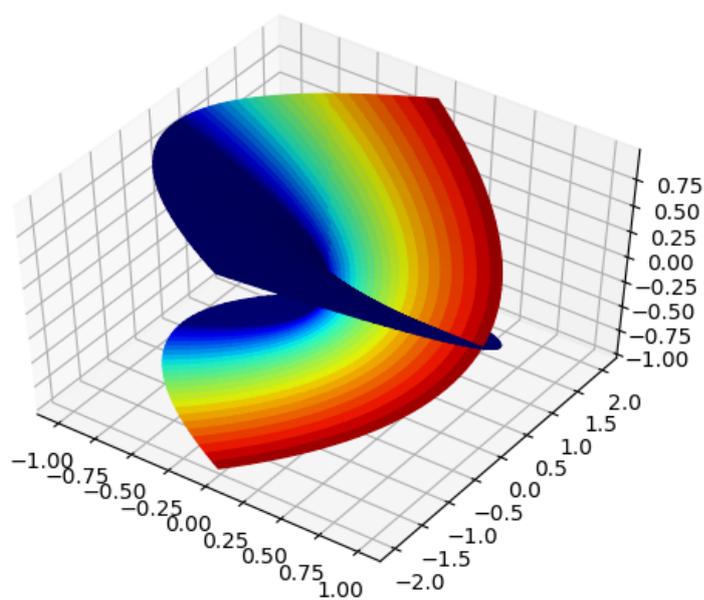


Abbildung 2.2: Diese Fläche stellt die ersten drei reellen Koordinaten der Punkte der Menge  $\{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 = w\} \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$  dar. Die vierte Koordinate wird durch die Farbe dargestellt. Anders ausgedrückt: Es ist das Bild des Realteils mehrwertigen (=multi-valued) Funktion  $w \mapsto \sqrt{w}$  und die Farbe entspricht dem Imaginärteil.



# Literaturverzeichnis

- [1] GROSSE, N. Analysis I, Skript, WS 2020/21, Uni Freiburg.  
[https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1\\_WS-2021\\_Skript.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1_WS-2021_Skript.pdf)  
Übungsaufgaben unter  
[https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1\\_WS-2021\\_uebungen\\_gesamt.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1_WS-2021_uebungen_gesamt.pdf).
- [2] GROSSE, N. Analysis II, Skript, SS 2021, Uni Freiburg.  
[https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2\\_SS-21\\_Skript.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2_SS-21_Skript.pdf)  
Übungsaufgaben unter [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2\\_SS-21\\_uebungen\\_gesamt.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2_SS-21_uebungen_gesamt.pdf).