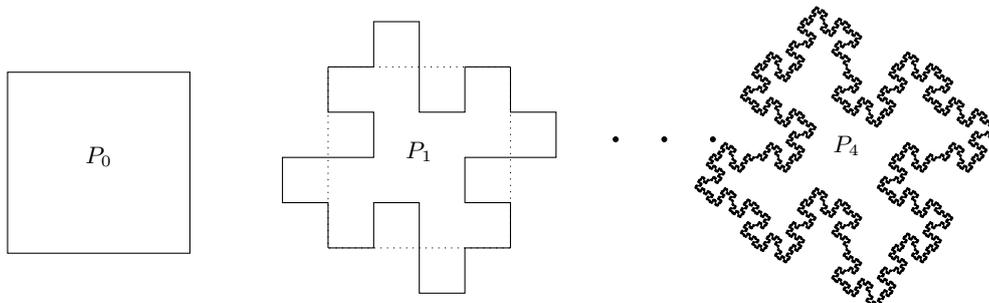


Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei P_0 das Quadrat mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n , indem jede Kante des Polygons geviertelt wird, auf den beiden mittleren Vierteln jeweils ein Quadrat mit Seitenlänge gleich dem dem Viertel der ursprünglichen Kante und zwar einmal nach außen und einmal nach innen gesetzt wird und dann dieses beiden mittlere Viertelkanten gelöscht werden.



Sei ℓ_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n .

- (a) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \infty$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass A_n für $n \rightarrow \infty$ konvergiert.

Aufgabe 2 (1+2.5+1.5). Sei $\gamma: t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos^2(t), -\sin^2(t))^T$.

- (i) Skizzieren Sie γ .
- (ii) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, das ist die Länge der Kurve γ auf dem Intervall $[0, t]$ (Also $s(0) = 0$ und $s(\frac{\pi}{2}) = L(\gamma)$).
- (iii) Die Funktion der Bogenlänge $s: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, L(\gamma)]$ ist ein Homöomorphismus. Warum? Ist es auch ein C^1 -Diffeomorphismus Begründen Sie?

Aufgabe 3 (2.5+2.5). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Variation $V(f)$ von f ist definiert als

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = (x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b)$ des Intervalls $[a, b]$ geht.

- (i) Beweisen Sie: Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve; $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))^T$ für $\gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist γ genau dann rektifizierbar, falls alle γ_i beschränkte Variation haben, d.h. falls $V(\gamma_i) < \infty$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkte Variation hat.

Nach (i) ist dann somit die Kurve $\gamma(t) = (t, f(t))^T$ mit f aus (ii) und $t \in [0, 1]$ nicht rektifizierbar.

Was bedeutet das für die Länge der Kurve γ ?

Abgabe am Mittwoch, 25.10.23, bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)