

---

## Übungsblatt 2

---

**Aufgabe 4** (1+1,5+1,5+1). Berechnen Sie

- (i)  $\int_{\gamma} f ds$  für  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1+9x^4}}$  für  $\gamma: t \in [-1, 2] \mapsto (t, 1 - t^3)^T \in \mathbb{R}^2$ .
- (ii)  $\int_{\gamma} V \cdot ds$  für  $V(x, y) = (-xy, x^2)^T$ , wobei  $\gamma$  den Kreis um den Ursprung vom Radius  $R$  im mathematisch positiven Drehsinne (= entgegen den Uhrzeigersinn) durchläuft.
- (iii)  $\int_{\gamma} V \cdot ds$  für  $V(x, y, z) = (0, x^2, -yz)^T$  entlang einer Kurve  $\gamma$ , die geradlinig von  $(4, -1, 2)^T$  nach  $(1, 7, -1)^T$  verläuft.
- (iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 5.** Sei  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine parametrisierte Kurve. Wir können  $g$  als Vektorfeld

$$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (\operatorname{Re} g(x + iy), \operatorname{Im} g(x + iy))^T$$

auffassen. Vergleichen Sie das Kurvenintegral zweiter Art  $\int_{\gamma} V \cdot ds$  mit dem komplexen Kurvenintegral  $\int_{\gamma} g dz$ . Im Spezialfall, dass  $g$  nur reelle Werte annimmt, vergleichen Sie diese Integrale zusätzlich mit dem Kurvenintegral  $\int_{\gamma} g ds$  erster Art.

**Aufgabe 6.** Sei  $f: \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Sei  $\gamma_R: \theta \in [0, \pi] \mapsto Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$  für  $R > 0$ . Sei  $a > 0$ ,  $g(z) = e^{iaz} f(z)$  und  $M_R := \max_{z \in \operatorname{Bild}(\gamma_R)} |f(z)|$ . Zeigen Sie: Aus  $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$  folgt  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g(z) dz = 0$ .

Hinweis: Schätzen Sie das Integral zunächst für ein festes  $R$  ab. Benutzen Sie dazu die Eulersche Formel und  $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$  für  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (Warum gilt die letzte Ungleichung?) und eine Symmetrie von  $\sin$ .

---

Abgabe am Donnerstag 02.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)