Erweiterung der Analysis Marius Amann, Nadine Große
WS 23/24

Übungsblatt 3

Aufgabe 7 (3+2)**.**

(i) (Länge in Polarkoordinaten) Sei $\gamma\colon I=[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Diese sei in Polarkoordinaten durch die Radiusfunktion $r(t)$ und die Winkelfunktion $\phi(t)$ gegeben, d.h. $\gamma(t)=(r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t))^T$. Rechnen Sie nach, dass die Länge von γ durch

$$L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{r'(t)^2+r(t)^2\phi'(t)^2}dt$$

gegeben ist.

Berechnen Sie damit die Länge der Kurve, die durch die implizite Vorschrift $r(\phi)=2+2\cos\phi$, $\phi\in[0,2\pi]$, (in Polarkoordinaten) gegeben ist, und skizzieren Sie die Kurve.

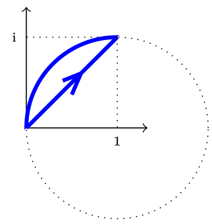
(ii) (Länge in Kugelkoordinaten) Sei $\gamma\colon I=[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Kurve. Berechnen Sie in Analogie zu (i) die Länge von γ in Kugelkoordinaten

$$\gamma(t)=(r(t)\cos\phi(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\phi(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))^T.$$

Aufgabe 8 (2,5+2,5)**.**

(i)

Berechnen Sie $\int_\gamma\bar{z}dz$, wobei γ die blaue Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



(ii) Sei $\gamma(t\in[0,1])=r(t)e^{\mathrm{i}\phi(t)}$ eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve (in Polardarstellung) Rechnen Sie nach[1] $\int_\gamma\frac{1}{z}dz=\phi(1)-\phi(0)$. Welche Werte kann $\phi(1)-\phi(0)$ annehmen? Zeichnen Sie jeweils ein Beispiel einer solchen Kurve.

Aufgabe 9 (2,5+2,5)**.**

(i) Sei $\phi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $V(x):=\operatorname{grad}\phi(x):=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x)\right)^T$. Für $x\in\mathbb{R}^n$ sei $\gamma_x(t\in[0,1])=tx$. Rechnen Sie nach, dass $\int_{\gamma_x}V\cdot ds=\phi(x)-\phi(0)$ gilt.

(Hinweis: Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\phi\circ\gamma)$.)

Gilt das auch, wenn γ_x eine beliebige stetige differenzierbare Kurve von 0 nach x ist?

(ii) Sei nun $V\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so dass für alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven γ_x von 0 nach x der Wert von $\int_{\gamma_x}V\cdot ds$ nicht von der Wahl von γ_x abhängt (von x wird es i.A. natürlich schon abhängen). Zeigen Sie, dass es dann ein $\phi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $V=\operatorname{grad}\phi$ gibt.

(Hinweis: Verwenden Sie dann (i), benutzen Sie die Definition der partiellen Ableitung zum Berechnen des Gradienten und nutzen Sie die Wegundabhängigkeit des Integrals um den Integralsweg dann zu vereinfachen.)

Abgabe am Mittwoch 08.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] Dabei keine Sätze zu Kurvenintegrale verwenden, die wir noch nicht hatten.