Erweiterung der Analysis Marius Amann, Nadine Große

WS 23/24

Übungsblatt 4

Aufgabe 10 (2+1+2)**.**

(i) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset Q = [0,1]$. Zeigen Sie, dass 1_Ω nicht integrierbar ist.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\operatorname{vol}\Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\operatorname{vol} A = 0$ gilt.

(iii) Sei $\Omega \subset [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ das rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck mit Kantenlänge 1, so dass die beiden Katheten jeweils auf der x- bzw. y-Achse liegen. Bestimmen Sie $S_k(1_\Omega)$ und $S^k(1_\Omega)$ und damit dann (unter Verwendung der Definition der Integrierbarkeit) $\int_{[0,1]^2} 1_\Omega \mathrm{dvol}$.

Aufgabe 11. Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es ist $\operatorname{rot} V(x,y) := \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_x}{\partial y}(x,y)\right)$ für $V = (V_x, V_y)$. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ, die den Rand entgegen den Uhrzeigersinn durchläuft, und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \mathrm{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds$$

gilt.

Hinweis: Eine 'einfache Wahl' von γ verringert den Rechenaufwand. Dazu hilft es vielleicht erst einmal die linke Seite teilweise auszurechnen.

Aufgabe 12 (3+2+2*)**.** Wir haben einen Stahlträger der Länge L und mit Querschnitt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wie im Bild an den Enden aufgelegt und üben auf diesen in der Mitte eine Kraft F aus. Dabei verbiegt sich der Träger, vgl. Bild, und $w(x)$ sei die Auslenkung des Trägers in Abhängigkeit vom Ort x. Es gilt

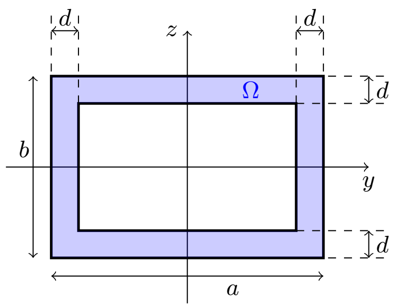
$$w''(x) = \frac{M_y(x)}{EI_y}.$$

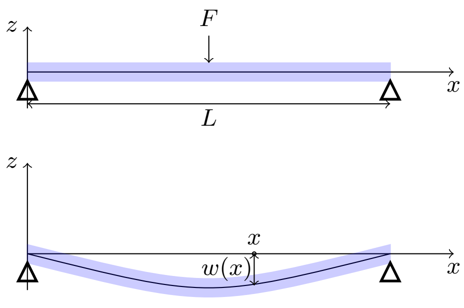
Hierbei ist E die Elastizitätskonstante des Materials des Trägers, also eine Materialkonstante. $M_y(x)$ ist das Biegemoment – für $x \in [0, \frac{L}{2}]$ ist dies gleich $\frac{F}{2}x$ und $I_y = \int_\Omega z^2 \mathrm{dvol}$ ist das Flächenmoment zweiten Grades des Trägers bei Belastung in z-Richtung.[1]

(i) Berechnen Sie I_y.

(ii) Was ist die maximale Auslenkung des Trägers?

(*) Was ist die maximale Auslenkung für $L = 2\,\mathrm{m}$, $E_{\text{Stahl}} = 210\,\mathrm{GPa}$, $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $d = 3\,\mathrm{mm}$ und $F = 1\,\mathrm{kN}$?





Abgabe am Mittwoch 15.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] Der Nullpunkt der z-Koordinaten liegt dabei im Schwerpunkt von Ω – also wie im Bild.