Übungsblatt 5

Aufgabe 13 (1+2+2)**.**

(i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\mathrm{dvol}$.

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0,a]\times[0,a] \subset \mathbb{R}^2$, $a>1$, so dass 1_Ω integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy\right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an (also erst nach dx und dann nach dy integrieren) und bestimmen Sie somit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_?^? \left(\int_?^? dx\right) dy.$$

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy\right) dx$$

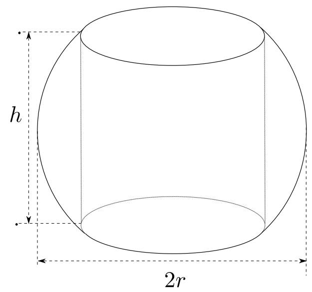
mit $\Omega \subset [0,a]\times[0,a^2]$ für $a>1$.

Aufgabe 14 (2,5+2,5)**.** (Prinzip des Cavalieri)

(i) Seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i=1,2$, beschränkt und so dass $1_{\Omega_i} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Für $h\in\mathbb{R}$ fassen wir $\Omega_{i,h} := \Omega_i \cap \{x_n = h\} \subset \mathbb{R}^{n-1}\times\{x_n=h\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$. Sei nun für alle $h\in\mathbb{R}$ die Funktion $1_{\Omega_{i,h}}\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ integrierbar. Sei $\mathrm{vol}_{n-1}\Omega_{i,h} := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\Omega_{i,h}}\mathrm{dvol}$ (vgl. Bemerkung 1.2.4). Sei $\mathrm{vol}_{n-1}\Omega_{1,h} = \mathrm{vol}_{n-1}\Omega_{2,h}$ für alle $h\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{vol}\,\Omega_1 = \mathrm{vol}\,\Omega_2$ gilt.

(ii) (Serviettenring-Problem)

Sie haben eine Kugel von Radius r und stechen mittels eines Zylinders, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Teil der Kugel aus. Dann bleibt (wenn der Radius des Zylinders kleiner r war) ein Rest übrig. Dieser Rest habe Höhe h. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Restes nicht vom Radius der ursprüngliches Kugel abhängt.



Aufgabe 15. Sei $Q\subset\mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q\to\mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g\colon Q\to\mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon Q\to\mathbb{R}$ integrierbar ist.

Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss, da Q kompakt ist.

Abgabe bis Mittwoch 22.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)