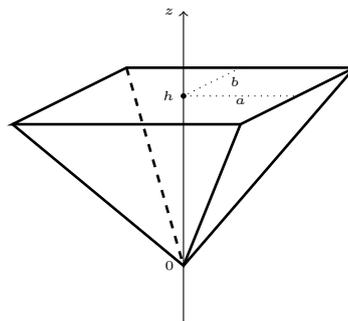

Übungsblatt 7

Aufgabe 19. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler Quader und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten $\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in Q\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $\text{vol}_{n+1} \text{graph}(f) = 0$ ist.

Aufgabe 20.

Berechnen Sie den Schwerpunkt sowie das Trägheitsmoment der Pyramide (rechteckige Grundfläche) im Bild bei Rotation um die z -Achse.



Aufgabe 21 (1,5+1,5+2). Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y)^T \mapsto (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)^T,$$

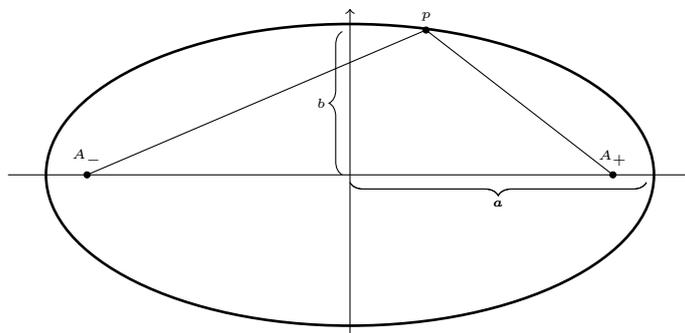
- (i) Zeigen Sie, dass $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Ellipse ist (s. nächste Seite für einen Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln). Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche x stimmt das nicht und was ist dann das Bild?
- (ii) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ für fast jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Hyperbel ist. Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche y stimmt das nicht und was ist dann das Bild?
- (iii) Finden Sie eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ (möglichst zusammenhängend), so dass $f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ bijektiv ist. Ist $f|_V$ dann ein Hömoömorphimus? Finden Sie ein $U \subset V$ offen derart, dass $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus ist und $U \subset V$ maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Abgabe bis Mittwoch 06.12.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln

Ellipsengleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



Hier sind $A_{\pm} = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Ellipse.

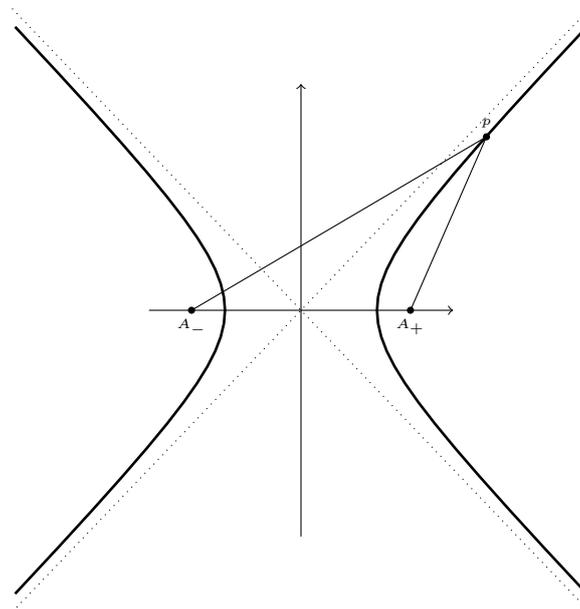
Die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist auch gleich

{alle Punkte p , deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten A_{\pm} , gleich $2a$ ist}.

Das ist die sogenannte *Gärtnerkonstruktion* der Ellipse, <https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#G%C3%A4rtnerkonstruktion>.

Hyperbelgleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



Hier sind $A_{\pm} = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Hyperbel.

Die Asymptoten der Hyperbel (gepunktete Geraden im Bild) sind $x \mapsto \pm \frac{b}{a}x$.

Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\left\{ \text{alle Punkte } p, \text{ mit } \left| |pA_+| - |pA_-| \right| = 2a \right\}.$$