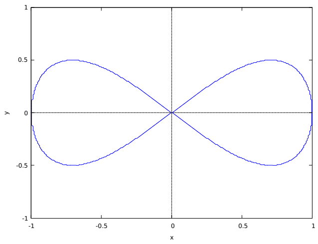
Erweiterung der Analysis Marius Amann, Nadine Große

WS 23/24

Übungsblatt 8

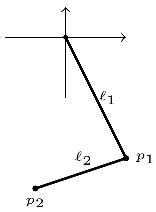
Aufgabe 22 (1,5+2+1,5). (i) Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$. Die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ ist eine *Lemniskate/ figure-eight Kurve.*



Ist die Lemniskate eine Untermannigfaltigkeit? Wenn nicht, was ist die maximale Teilmenge, die eine Untermannigfaltigkeit ist. Begründen Sie.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte b, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte a und b, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

(iii)



Sei ein Doppelpendel wie im Bild gegeben (d.h. der Aufhängepunkt im Ursprung ist fest, die Längen ℓ_1 und ℓ_2 der Stäbe ist fest, sonst ist alles frei beweglich). Sei $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ die Menge aller $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4$, die durch diese Konstruktion erreichbar sind. Bestimmen Sie M und zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist. Was ist die Dimension?

Aufgabe 23 (2.5+2.5). Geben Sie genügend lokale Parametrisierungen an, um zu sehen, dass folgende Mengen nach Satz 1.3.4 Untermannigfaltigkeiten sind. Skizzieren Sie die Mengen für $m = 2$, $k = 1$. Was ist jeweils die Dimension?

(i) $S^m = \{x = (x_1, \ldots, x_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\}$

(ii) $G = \{x = (x_1, ..., x_{m+1}, ..., x_{m+k})^T \in \mathbb{R}^{m+k=n} \mid x_{m+i} = f_i(x_1, ..., x_m)\}$ für eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Aufgabe 24 (2+1+1+1).

(i) Sei $f(x,y) = (ax, by)$ für $a, b > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Zeigen Sie (ohne Verwendung der Transformationsformel/ einer Koordinatentransformation in $\mathbb{R}^2$), dass $f(\Omega) := \{f(z) \mid z \in \Omega\}$ Jordan-messbar mit $\operatorname{vol} f(\Omega) = ab \operatorname{vol} \Omega$ ist.

(ii) Benutzen Sie (i) um den Flächeninhalt des Inneren einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus dem Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen.

(iii) Berechnen Sie alternativ den Flächeninhalt aus (ii), in dem Sie den Flächeninhalt im ersten Quadranten unter der Ellipse direkt berechnen.

(iv) Die gleiche Methode hilft leider nicht den Umfang der Ellipse einfach zu berechnen. Rechnen Sie nach, dass $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt$ der Umfang der Ellipse ist. Dies ist ein elliptisches Integral. Schreiben Sie L als ein Vielfaches eines vollständigen elliptisches Integral zweiter Art[1], d.h. der Form $c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}\, dt$, und lesen Sie mittels Abbildung 17.2 der Fußnote[2] ab, was die Länge einer Ellipse mit $a = 2$ und $b = 1$ ist (dazu muss natürlich erst das zugehörige α dort bestimmt werden).

Abgabe bis Mittwoch 13.12.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_590.htm – 17.3.3
[2] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_592.htm