# Übungsblatt 9

**Aufgabe 25.** (1+1,5+2,5) Wahr oder falsch? Begründen Sie.

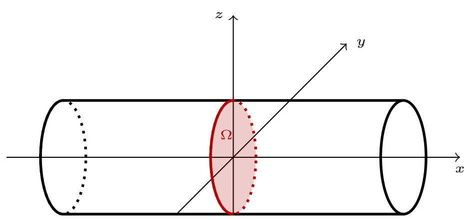
(i) Jede endliche Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar mit Volumen Null.

(ii) Jede abzählbare beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar mit Volumen Null.

(iii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar mit Volumen Null. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ stetig. Dann ist auch $f(M) \subset \mathbb{R}^k$ Jordan-messbar mit Volumen Null.

**Aufgabe 26.**
Sei $\Omega \subset B_d(0) \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right], (y, z) \in \Omega \right\}$$



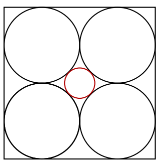

(d.h. $S$ ist ein Stab der Länge $\ell$ und konstantem Querschnitt $\Omega$). Sei die Dichte des Stabes konstant und $m$ seine Masse. Sei $J$ das Trägheitsmoment von $S$ bei Drehung um die $z$-Achse.

Zeigen Sie, dass dann

$$J = m\left(\frac{\ell^2}{12} + O(d^2)\right)$$

gilt.[1]

**Aufgabe 27.**



Sei $Q = [-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ der Einheitswürfel in $n$ Dimensionen. Wir packen $2^n$ $n$-dimensionale Bälle des Radius $\frac{1}{2}$ so in den Würfel, dass Sie sich berühren können aber nicht überlappen (Also in jede Ecke einen Ball, so dass dieser die angrenzenden Wände berührt), siehe Zeichnung für $n = 2$. Sei $r$ der Radius eines Balles mit Mittelpunkt im Ursprung (also der Mitte des Würfels), so dass dieser Ball alle anderen Bälle berührt. Berechnen Sie $r$. Liegt dieser Ball immer vollständig im Würfel?

**Abgabe bis Mittwoch 20.12.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)**

[1] Ist $d$ sehr klein, verglichen zu $\ell$, nennt man $S$ einen dünnen Stab und rechnet direkt mit $J = \frac{m\ell^2}{12}$.