
Übungsblatt 12

Aufgabe 34. Berechnen Sie $\int_S \langle V, N \rangle d\text{vol}$ für $V = (yx^2, xy^2 - 3z^4, x^3 + y^2)$, wobei S ist der Rand von $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \leq 0, y \leq 0\}$ und N der äußere Einheitsnormalenvektor auf S ist – einmal direkt und einmal mittels des Divergenzsatzes.

Aufgabe 35. Sei $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{2}\}$. Sei γ eine einfach geschlossene Kurve, welche $C \cap \{z = \frac{1}{2}\}$ parametrisiert. Berechnen Sie $\int_\gamma F \cdot ds$ für $F = (\sin x - \frac{y^3}{3}, \cos y + \frac{x^3}{3}, xyz)$ einmal direkt und einmal mittels des Rotationsatzes (=Satz von Stokes) unter Verwendung der Fläche C .

Aufgabe 36 (2,5+2,5).

- (i) Zeigen Sie explizit mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit, dass $f_1(z) = z^2$ komplex differenzierbar ist, $f_2(z) = \bar{z}$ jedoch nicht.
- (ii) Sei $f_1(z) = \sin z$ und $f_2 = \cos z$. Es ist $\sin(ix) = i \sinh x$ und $\cos(ix) = \cosh x$ für $x \in \mathbb{R}$. Nun folgt mit $\sin z := \sin(x + iy)$ und Additionstheorem für den Sinus, dass $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sin y$. Analog ist $\cos z := \cos(x + iy)$.

Rechnen Sie explizit nach, dass $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt und damit holomorph ist. Was ist $f_1'(z)$ und $f_2'(z)$?