Erweiterung der Analysis

Marius Amann, Nadine Große
WS 23/24

Übungsblatt 14– ohne Abgabe

Aufgabe 40. Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ noch einmal berechnen und dabei fast genau wie in Aufgabe 39 vorgehen – nur die Partialbruchzerlegung werden wir durch eine Verwendung des Cauchy-Integralsatzes ersetzen:

Wir beginnen genau wie in Aufgabe 39 bis wir die Formel

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz$$

haben. Um nun die rechte Seite zu berechnen, setzen wir $g(z) = \frac{1}{z+\underline{\quad}}$. Dann ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$. Die Funktion $g(z)$ ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene ____________________. Damit folgt mit dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = \underline{\qquad\quad}$$

Der Rest geht jetzt genau wie in Aufgabe 39 weiter.

Verwenden Sie diese Abwandlung des Vorgehens in Aufg. 39, um so auch $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4x^2)^2} dx$ zu berechnen.

Aufgabe 41. Sei $p \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $\epsilon > 0$ und $f \colon B_{R+\epsilon}(p) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \partial B_R(p)} |f(z)|.$$