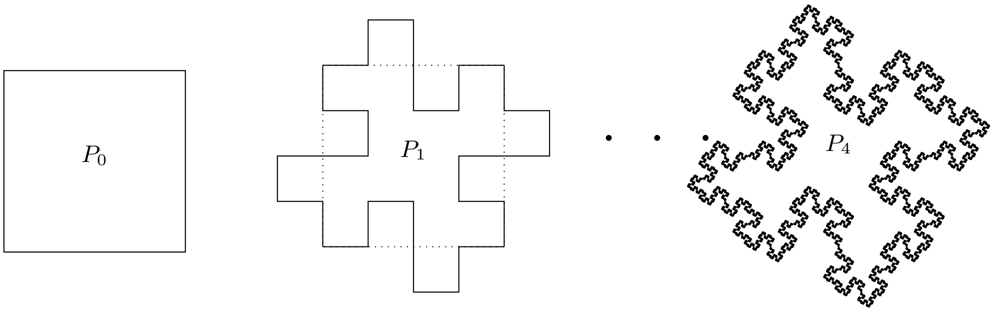
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei P_0 das Quadrat mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n, indem jede Kante des Polygons geviertelt wird, auf den beiden mitteleren Vierteln jeweils ein Quadrat mit Seitenlänge gleich dem dem Viertel der ursprünglichen Kante und zwar einmal nach außen und einmal nach innen gesetzt wird und dann dieses beiden mittlere Viertelkanten gelöscht werden.



Sei ℓ_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n.

(a) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \ell_n = \infty$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass A_n für $n \to \infty$ konvergiert.

Aufgabe 2 (1+2.5+1.5)**.** Sei $\gamma\colon t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos^2(t), -\sin^2(t))^T$.

(i) Skizzieren Sie γ.

(ii) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, das ist die Länge der Kurve γ auf dem Intervall $[0, t]$ (Also $s(0) = 0$ und $s(\frac{\pi}{2}) = L(\gamma)$).

(iii) Die Funktion der Bogenlänge $s\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, L(\gamma)]$ ist ein Homöomorphismus. Warum? Ist es auch ein C^1-Diffeomorphismus Begründen Sie?

Aufgabe 3 (2.5+2.5)**.** Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Variation $V(f)$ von f ist definiert als

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b)$ des Intervalls $[a, b]$ geht.

(i) Beweisen Sie: Sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve; $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))^T$ für $\gamma_i\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist γ genau dann rektifizierbar, falls alle γ_i beschränkte Variation haben, d.h. falls $V(\gamma_i) < \infty$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkte Variation hat.

Nach (i) ist dann somit die Kurve $\gamma(t) = (t, f(t))^T$ mit f aus (ii) und $t \in [0, 1]$ nicht rektifizierbar. Was bedeutet das für die Lange der Kurve γ?

Abgabe am Mittwoch, 25.10.23, bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (1+1,5+1,5+1)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_\gamma f ds$ für $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1+9x^4}}$ für $\gamma\colon t \in [-1,2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = (-xy, x^2)^T$, wobei γ den Kreis um den Ursprung vom Radius R im mathematisch positiven Drehsinne (= entgegen den Uhrzeigersinn) durchläuft.

(iii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y,z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve γ, die geradlinig von $(4,-1,2)^T$ nach $(1,7,-1)^T$ verläuft.

(iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Sei $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine parametrisierte Kurve. Wir können g als Vektorfeld

$$V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (\operatorname{Re} g(x+\mathrm{i}y), \operatorname{Im} g(x+\mathrm{i}y))^T$$

auffassen. Vergleichen Sie das Kurvenintegral zweiter Art $\int_\gamma V \cdot ds$ mit dem komplexen Kurvenintegral $\int_\gamma g\, dz$. Im Spezialfall, dass g nur reelle Werte annimmt, vergleichen Sie diese Integrale zusätzlich mit dem Kurvenintegral $\int_\gamma g\, ds$ erster Art.

Aufgabe 6. Sei $f\colon \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $\gamma_R\colon \theta \in [0,\pi] \mapsto Re^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$ für $R > 0$. Sei $a > 0$, $g(z) = e^{\mathrm{i}az} f(z)$ und $M_R := \max_{z \in \mathrm{Bild}(\gamma_R)} |f(z)|$. Zeigen Sie: Aus $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$ folgt $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0$.

Hinweis: Schätzen Sie das Integral zunächst für ein festes R ab. Benutzen Sie dazu die Eulersche Formel und $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ für $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (Warum gilt die letzte Ungleichung?) und eine Symmetrie von sin.

Abgabe am Donnerstag 02.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

Erweiterung der Analysis

Marius Amann, Nadine Große
WS 23/24

Übungsblatt 3

Aufgabe 7 (3+2)**.**

(i) (Länge in Polarkoordinaten) Sei $\gamma\colon I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Diese sei in Polarkoordinaten durch die Radiusfunktion $r(t)$ und die Winkelfunktion $\phi(t)$ gegeben, d.h. $\gamma(t) = (r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t))^T$. Rechnen Sie nach, dass die Länge von γ durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\phi'(t)^2}dt$$

gegeben ist.

Berechnen Sie damit die Länge der Kurve, die durch die implizite Vorschrift $r(\phi) = 2+2\cos\phi$, $\phi \in [0, 2\pi]$, (in Polarkoordinaten) gegeben ist, und skizzieren Sie die Kurve.

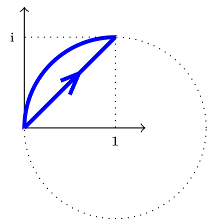
(ii) (Länge in Kugelkoordinaten) Sei $\gamma\colon I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Kurve. Berechnen Sie in Analogie zu (i) die Länge von γ in Kugelkoordinaten

$$\gamma(t) = (r(t)\cos\phi(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\phi(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))^T.$$

Aufgabe 8 (2,5+2,5)**.**

(i)

Berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z}dz$, wobei γ die blaue Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



(ii) Sei $\gamma(t \in [0,1]) = r(t)e^{\mathrm{i}\phi(t)}$ eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve (in Polardarstellung) Rechnen Sie nach[1] $\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \phi(1) - \phi(0)$. Welche Werte kann $\phi(1) - \phi(0)$ annehmen? Zeichnen Sie jeweils ein Beispiel einer solchen Kurve.

Aufgabe 9 (2,5+2,5)**.**

(i) Sei $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $V(x) := \operatorname{grad}\phi(x) := \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x)\right)^T$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\gamma_x(t \in [0,1]) = tx$. Rechnen Sie nach, dass $\int_{\gamma_x} V \cdot ds = \phi(x) - \phi(0)$ gilt.

(Hinweis: Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)$.)

Gilt das auch, wenn γ_x eine beliebige stetige differenzierbare Kurve von 0 nach x ist?

(ii) Sei nun $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so dass für alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven γ_x von 0 nach x der Wert von $\int_{\gamma_x} V \cdot ds$ nicht von der Wahl von γ_x abhängt (von x wird es i.A. natürlich schon abhängen). Zeigen Sie, dass es dann ein $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $V = \operatorname{grad}\phi$ gibt.

(Hinweis: Verwenden Sie dann (i), benutzen Sie die Definition der partiellen Ableitung zum Berechnen des Gradienten und nutzen Sie die Wegundabhängigkeit des Integrals um den Integralsweg dann zu vereinfachen.)

Abgabe am Mittwoch 08.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] Dabei keine Sätze zu Kurvenintegrale verwenden, die wir noch nicht hatten.

Übungsblatt 4

Aufgabe 10 (2+1+2)**.**

(i) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset Q = [0,1]$. Zeigen Sie, dass 1_Ω nicht integrierbar ist.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\operatorname{vol}\Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\operatorname{vol} A = 0$ gilt.

(iii) Sei $\Omega \subset [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ das rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck mit Kantenlänge 1, so dass die beiden Katheten jeweils auf der x- bzw. y-Achse liegen. Bestimmen Sie $S_k(1_\Omega)$ und $S^k(1_\Omega)$ und damit dann (unter Verwendung der Definition der Integrierbarkeit) $\int_{[0,1]^2} 1_\Omega \mathrm{dvol}$.

Aufgabe 11. Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es ist $\operatorname{rot} V(x,y) := \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_x}{\partial y}(x,y)\right)$ für $V = (V_x, V_y)$. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ, die den Rand entgegen den Uhrzeigersinn durchläuft, und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \mathrm{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds$$

gilt.

Hinweis: Eine 'einfache Wahl' von γ verringert den Rechenaufwand. Dazu hilft es vielleicht erst einmal die linke Seite teilweise auszurechnen.

Aufgabe 12 (3+2+2*)**.** Wir haben einen Stahlträger der Länge L und mit Querschnitt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wie im Bild an den Enden aufgelegt und üben auf diesen in der Mitte eine Kraft F aus. Dabei verbiegt sich der Träger, vgl. Bild, und $w(x)$ sei die Auslenkung des Trägers in Abhängigkeit vom Ort x. Es gilt

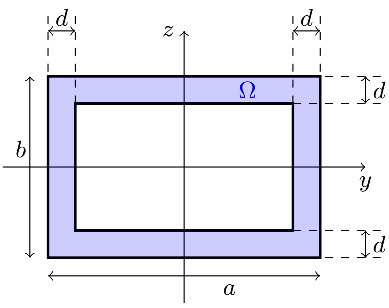
$$w''(x) = \frac{M_y(x)}{EI_y}.$$

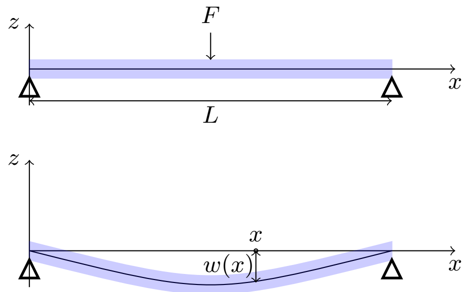
Hierbei ist E die Elastizitätskonstante des Materials des Trägers, also eine Materialkonstante. $M_y(x)$ ist das Biegemoment – für $x \in [0, \frac{L}{2}]$ ist dies gleich $\frac{F}{2}x$ und $I_y = \int_\Omega z^2 \mathrm{dvol}$ ist das Flächenmoment zweiten Grades des Trägers bei Belastung in z-Richtung.[1]

(i) Berechnen Sie I_y.

(ii) Was ist die maximale Auslenkung des Trägers?

(*) Was ist die maximale Auslenkung für $L = 2\,\mathrm{m}$, $E_{\text{Stahl}} = 210\,\mathrm{GPa}$, $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $d = 3\,\mathrm{mm}$ und $F = 1\,\mathrm{kN}$?





Abgabe am Mittwoch 15.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] Der Nullpunkt der z-Koordinaten liegt dabei im Schwerpunkt von Ω – also wie im Bild.

Erweiterung der Analysis Marius Amann, Nadine Große
WS 23/24

Übungsblatt 5

Aufgabe 13 (1+2+2)**.**

(i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\mathrm{dvol}$.

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0,a]\times[0,a] \subset \mathbb{R}^2$, $a>1$, so dass 1_Ω integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy\right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an (also erst nach dx und dann nach dy integrieren) und bestimmen Sie somit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_?^? \left(\int_?^? dx\right) dy.$$

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy\right) dx$$

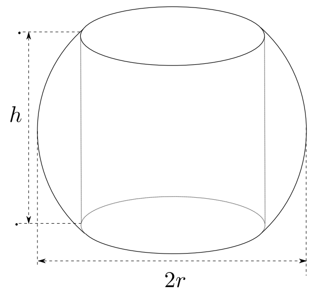
mit $\Omega \subset [0,a]\times[0,a^2]$ für $a>1$.

Aufgabe 14 (2,5+2,5)**.** (Prinzip des Cavalieri)

(i) Seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i=1,2$, beschränkt und so dass $1_{\Omega_i} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Für $h\in\mathbb{R}$ fassen wir $\Omega_{i,h} := \Omega_i \cap \{x_n = h\} \subset \mathbb{R}^{n-1}\times\{x_n=h\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$. Sei nun für alle $h\in\mathbb{R}$ die Funktion $1_{\Omega_{i,h}}\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ integrierbar. Sei $\mathrm{vol}_{\,n-1}\Omega_{i,h} := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\Omega_{i,h}}\mathrm{dvol}$ (vgl. Bemerkung 1.2.4). Sei $\mathrm{vol}_{\,n-1}\Omega_{1,h} = \mathrm{vol}_{\,n-1}\Omega_{2,h}$ für alle $h\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{vol}\,\Omega_1 = \mathrm{vol}\,\Omega_2$ gilt.

(ii) (Serviettenring-Problem)

Sie haben eine Kugel von Radius r und stechen mittels eines Zylinders, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Teil der Kugel aus. Dann bleibt (wenn der Radius des Zylinders kleiner r war) ein Rest übrig. Dieser Rest habe Höhe h. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Restes nicht vom Radius der ursprüngliches Kugel abhängt.



Aufgabe 15. Sei $Q\subset\mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q\to\mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g\colon Q\to\mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon Q\to\mathbb{R}$ integrierbar ist.

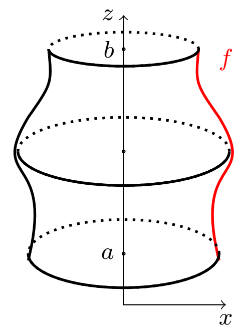
Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss, da Q kompakt ist.

Abgabe bis Mittwoch 22.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

Erweiterung der Analysis Marius Amann, Nadine Große
WS 23/24

Übungsblatt 6

Aufgabe 16 (2,5+2,5)**.** (Volumen von Rotationskörpern)



(i) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion. Betrachten wir im $\mathbb{R}^3$ in der (x,z)-Ebene den Funktionsgraphen von $x = f(z)$ und drehen diesen um die z-Achse. Dabei entsteht eine Rotationsfläche, vgl. Abb. Zwischen den Ebenen $z = a$ und $z = b$ schließt diese eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein. Geben Sie Ω in der Form $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ldots\}$ an und zeigen Sie:

$$\operatorname{vol}\Omega = \int_a^b \pi f(z)^2 dz.$$

(ii) Berechnen Sie mittels (i) das Volumen einer Kugel mit Radius r.

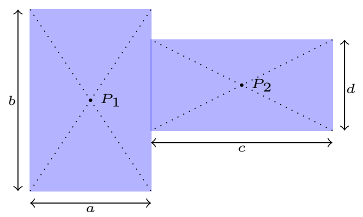
Aufgabe 17 (2,5+2,5)**.**

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist das Innere, was durch die Menge $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ beschränkt wird. Skizzieren Sie Ω und berechnen Sie das Volumen von Ω.

(ii) Berechnen Sie $\int_\Omega z\mathrm{dvol}$ für $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Aufgabe 18 (1,5+1,5+2)**.**

(i) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt der blauen Fläche im Bild gleich dem Punkt $\frac{abP_1 + cdP_2}{ab+cd}$ ist.



(ii) Wir betrachten eine Luftsäule mit rechteckiger Grundfläche Q (Seitenlängen seien a und b) und der Höhe h. Die Dichte der Luft sei $\rho(x,y,z) = \rho_0 e^{-\alpha z}$. Berechnen Sie die Masse der Luftsäule.

(iii) Zwei Zahlen werden zufällig aus dem Intervall $[0,1]$ ausgewählt (uniform gleichverteilt). Das Maximum der beiden Zahlen nennen wir X, das Minimum Y. Ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte[1] ist dann

$$\rho_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{falls } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Was ist der Erwartungswert von X und was ist der Erwartungswert von $X \cdot Y$?

Abgabe bis Mittwoch 29.11.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] Zur Info: $\rho_{X,Y}$ kann man sich wie folgt herleiten: Seien a,b die beiden gezogenen Zahlen. Dann berechnen sich X,Y aus a,b mittels $f\colon (a,b) \in [0,1]^2 \to (X = \max\{a,b\}, Y = \min\{a,b\}) \in [0,1]^2$. Da a,b unanhängig voneinander sind und gleichverteilt aus $[0,1]$ gezogen werden, ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von a,b gleich $\rho_{a,b} = 1_{[0,1]^2}$. Wir wollen die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$ bestimmen und damit dann die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte mittels $\rho(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$: Es ist
$F_{X,Y}(c,d) = P(X \leq c, Y \leq d) = \begin{cases} P(a \leq d, b \leq d) + P(a \in [c,d), b \leq d) + P(b \in [c,d), a \leq b) = 2cd - d^2 & 0 \leq d \leq c \leq 1 \\ P(a \leq c, b \leq c) = c^2 & \text{sonst.} \end{cases}$

Erweiterung der Analysis

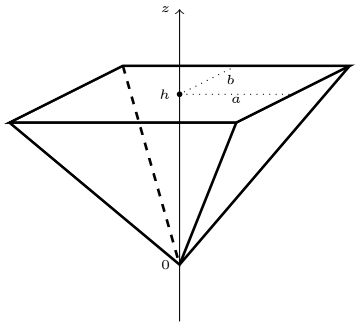
Marius Amann, Nadine Große
WS 23/24

Übungsblatt 7

Aufgabe 19. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten $\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in Q\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{vol}_{n+1} \operatorname{graph}(f) = 0$ ist.

Aufgabe 20.

Berechnen Sie den Schwerpunkt sowie das Trägheitsmoment der Pyramide (rechteckige Grundfläche) im Bild bei Rotation um die z-Achse.



Aufgabe 21 (1,5+1,5+2)**.** Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y)^T \mapsto (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)^T,$$

(i) Zeigen Sie, dass $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Ellipse ist (s. nächste Seite für einen Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln). Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche x stimmt das nicht und was ist dann das Bild?

(ii) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y)$ für fast jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Hyperbel ist. Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche y stimmt das nicht und was ist dann das Bild?

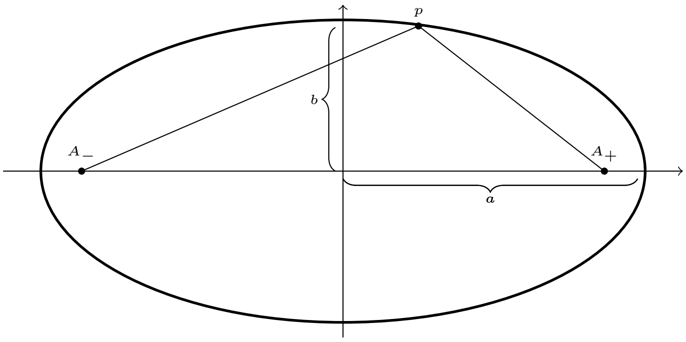
(iii) Finden Sie eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ (möglichst zusammenhängend), so dass $f|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$ bijektiv ist. Ist $f|_V$ dann ein Hömoömorphismus? Finden Sie ein $U \subset V$ offen derart, dass $f|_U\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist und $U \subset V$ maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Abgabe bis Mittwoch 06.12.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln

Ellipsengleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



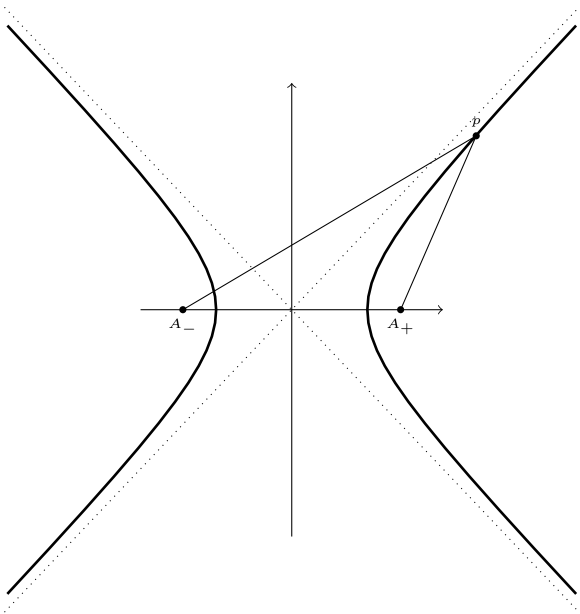
Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Ellipse.
Die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist auch gleich

$$\{\text{alle Punkte } p, \text{ deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten } A_\pm, \text{ gleich } 2a \text{ ist}\}.$$

Das ist die sogenannte *Gärtnerkonstruktion* der Ellipse, https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#G%C3%A4rtnerkonstruktion.

Hyperbelgleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Hyperbel.

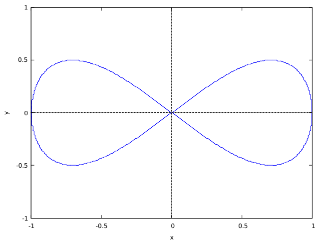
Die Asymptoten der Hyperbel (gepunktete Geraden im Bild) sind $x \mapsto \pm\frac{b}{a}x$.
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\Big\{\text{alle Punkte } p, \text{ mit } \Big| |pA_+| - |pA_-| \Big| = 2a\Big\}.$$

Erweiterung der Analysis Marius Amann, Nadine Große
WS 23/24

Übungsblatt 8

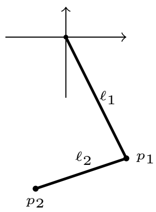
Aufgabe 22 (1,5+2+1,5)**.** (i) Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$. Die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ ist eine *Lemniskate/ figure-eight Kurve.*



Ist die Lemniskate eine Untermannigfaltigkeit? Wenn nicht, was ist die maximale Teilmenge, die eine Untermannigfaltigkeit ist. Begründen Sie.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte b, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte a und b, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

(iii)



Sei ein Doppelpendel wie im Bild gegeben (d.h. der Aufhängepunkt im Ursprung ist fest, die Längen ℓ_1 und ℓ_2 der Stäbe ist fest, sonst ist alles frei beweglich). Sei $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ die Menge aller $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4$, die durch diese Konstruktion erreichbar sind. Bestimmen Sie M und zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist. Was ist die Dimension?

Aufgabe 23 (2.5+2.5)**.** Geben Sie genügend lokale Parametrisierungen an, um zu sehen, dass folgende Mengen nach Satz 1.3.4 Untermannigfaltigkeiten sind. Skizzieren Sie die Mengen für $m = 2$, $k = 1$. Was ist jeweils die Dimension?

(i) $S^m = \{x = (x_1, \ldots, x_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\}$

(ii) $G = \{x = (x_1, ..., x_{m+1}, ..., x_{m+k})^T \in \mathbb{R}^{m+k=n} \mid x_{m+i} = f_i(x_1, ..., x_m)\}$ für eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Aufgabe 24 (2+1+1+1).

(i) Sei $f(x, y) = (ax, by)$ für $a, b > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Zeigen Sie (<u>ohne</u> Verwendung der Transformationsformel/ einer Koordinatentransformation in $\mathbb{R}^2$), dass $f(\Omega) := \{f(z) \mid z \in \Omega\}$ Jordan-messbar mit $\operatorname{vol} f(\Omega) = ab \operatorname{vol} \Omega$ ist.

(ii) Benutzen Sie (i) um den Flächeninhalt des Inneren einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus dem Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen.

(iii) Berechnen Sie alternativ den Flächeninhalt aus (ii), in dem Sie den Flächeninhalt im ersten Quadranten unter der Ellipse direkt berechnen.

(iv) Die gleiche Methode hilft leider nicht den Umfang der Ellipse einfach zu berechnen. Rechnen Sie nach, dass $L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$ der Umfang der Ellipse ist. Dies ist ein elliptisches Integral. Schreiben Sie L als ein Vielfaches eines vollständigen elliptisches Integral zweiter Art[1], d.h. der Form $c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 t} dt$, und lesen Sie mittels Abbildung 17.2 der Fußnote[2] ab, was die Länge einer Ellipse mit $a = 2$ und $b = 1$ ist (dazu muss natürlich erst das zugehörige α dort bestimmt werden).

Abgabe bis Mittwoch 13.12.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_590.htm – 17.3.3
[2] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_592.htm

Übungsblatt 9

Aufgabe 25. (1+1,5+2,5) Wahr oder falsch? Begründen Sie.

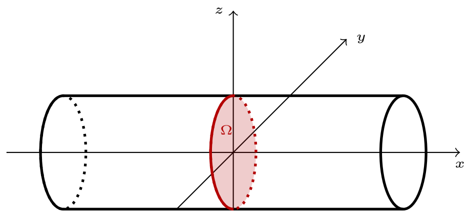
(i) Jede endliche Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar mit Volumen Null.

(ii) Jede abzählbare beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar mit Volumen Null.

(iii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar mit Volumen Null. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ stetig. Dann ist auch $f(M) \subset \mathbb{R}^k$ Jordan-messbar mit Volumen Null.

Aufgabe 26.
Sei $\Omega \subset B_d(0) \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right], (y, z) \in \Omega \right\}$$



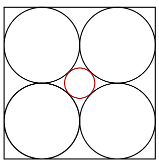
(d.h. S ist ein Stab der Länge ℓ und konstantem Querschnitt Ω). Sei die Dichte des Stabes konstant und m seine Masse. Sei J das Trägheitsmoment von S bei Drehung um die z-Achse.

Zeigen Sie, dass dann

$$J = m\left(\frac{\ell^2}{12} + O(d^2)\right)$$

gilt.[1]

Aufgabe 27.



Sei $Q = [-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ der Einheitswürfel in n Dimensionen. Wir packen 2^n n-dimensionale Bälle des Radius $\frac{1}{2}$ so in den Würfel, dass Sie sich berühren können aber nicht überlappen (Also in jede Ecke einen Ball, so dass dieser die angrenzenden Wände berührt), siehe Zeichnung für $n = 2$. Sei r der Radius eines Balles mit Mittelpunkt im Ursprung (also der Mitte des Würfels), so dass dieser Ball alle anderen Bälle berührt. Berechnen Sie r. Liegt dieser Ball immer vollständig im Würfel?

Abgabe bis Mittwoch 20.12.23 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] Ist d sehr klein, verglichen zu ℓ, nennt man S einen dünnen Stab und rechnet direkt mit $J = \frac{m\ell^2}{12}$.

Übungsblatt 10– Frohe Weihnachten!

Aufgabe 28 (1,5+1,5+2)**.** Sei

$$\phi_1 \colon (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (s, ts) \in \mathbb{R}^2$$

und

$$\phi_2 \colon (r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben.

(i) Geben Sie für $i \in \{1,2\}$ jeweils eine maximale offene Teilmenge $U_i \subset \mathbb{R}^2$ an, so dass $\psi_i := \phi_i|_{U_i}$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.

(ii) Sei das Dreieck $\Delta = \{(x,y) \mid x \in [0,a], 0 \le y \le bx\}$, für $a, b > 0$, gegeben. Skizzieren Sie jeweils $\psi_i^{-1}(\Delta)$.

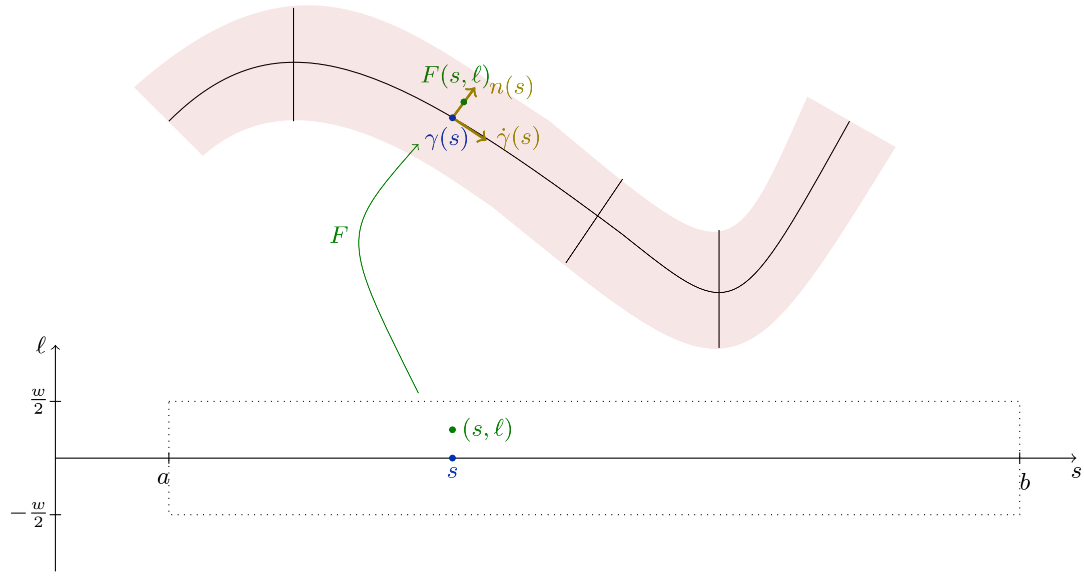
(iii) Benutzen Sie für jedes ψ_i die Transformationsformel um den Flächeninhalt von Δ zu berechnen.

Aufgabe 29 (1,5+2+1,5)**.** Berechnen Sie von folgenden Funktionen jeweils das Integral über $B_R(0) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid |u| \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) $f(u) = |u|^2$

(ii) $f(u)$ ist das Quadrat des Abstandes von u zur z-Achse.

(iii) $f(u)$ ist der Abstand von u zur $x - y$-Ebene.



Aufgabe 30 (1+4+2*)**.** Der Schleifensatz (ribbon theorem) besagt:

Schleifensatz. Die Fläche eines gekrümmen Gebietes konstanter Breiter ist gleich dieser Breite mal der Länge seiner Mediankurve, das ist die Kurve, die durch die Mittelpunkte der Breiten beschrieben wird, vgl. Abbildung.

Wir wollen diesen Satz mittels der Transformationsformel beweisen. Dazu sei die Mediankurve durch eine glatte Kurve $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$ mit $|\dot\gamma(s)| = 1$ beschrieben und $n(s)$ sei der Einheitsvektor, der durch Drehung von $\dot\gamma(s)$ in mathematisch positiver Drehrichtung entsteht. Sei w die konstante Breite.

Mittels dem Parameter der Kurve und eine Parameter entlang der Breite parametrisieren wir das Gebiet:

$$F\colon \left(-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}\right) \times (a,b) \to \mathbb{R}^2, \quad (\ell, s) \mapsto F(\ell, s).$$

(i) Was ist hier $F(\ell, s)$?

(ii) Benutzen Sie die Transformationsformel, um den Flächeninhalt des gekrümmten Gebietes auszurechnen.

Hinweis:

a) Überlegen Sie sich, dass aus $|n(s)| = 1$ folgt, dass $\langle n(s), \dot n(s)\rangle = 0$ gilt.

b) Es sollte dann $\det D_{(\ell,s)}F = -1 - \ell|\dot n(s)|$ sein. Benutzen Sie (vgl. Zusatzteil), dass $\frac{w}{2}|\dot n(s)| \leq 1$ ist.

(iii*) Gilt die Bedingung $\frac{w}{2}|\dot n(s)| \leq 1$ nicht, dann kann F nicht injektiv sein. Veranschaulichen Sie sich die Bedeutung, dieser Bedingung für den Fall, dass γ einen Kreis vom Radius R beschreibt.

Abgabe bis Mittwoch 10.01.24 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

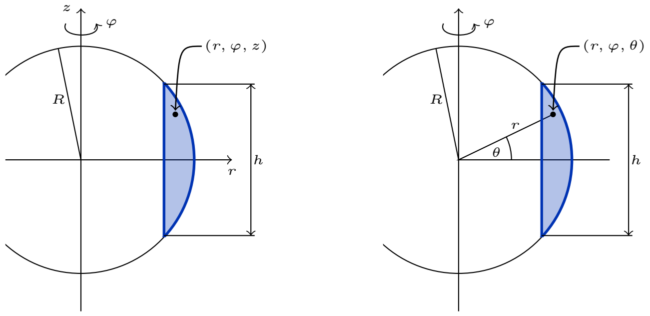
Erweiterung der Analysis Marius Amann, Nadine Große

WS 23/24

Übungsblatt 11

Aufgabe 31. Wir betrachten noch einmal das Serviettenring-Problem aus Aufgabe 14. Dieses Mal wollen wir das Volumen des Serviettenringes anders ausrechnen und zwar mit der Transformationsformel.

Benutzen Sie einmal Zylinderkoordinaten (wie links im Bild) und einmal Kugelkoordinaten (wie rechts im Bild), um jeweils das Volumen des Serviettenrings der Höhe h entstanden aus einer Kugel vom Radius R zu berechnen.



Aufgabe 32. (2,5+2,5)

(i) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Funktion und S die Menge, welche durch Rotation der Kurve $\{(f(z), 0, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b)\}$ um die z-Achse entsteht. Dann ist

$$S = \{(f(z)\cos ?, f(z)?, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b), \phi \in \mathbb{R}\}.$$

Was muss bei den Fragezeichen stehen? Finden Sie geeignete Parametrisierungen, um zu zeigen, dass S eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) (Oberfläche von Rotationskörpern) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}_{>0}$ und S wie in (i). Zeigen Sie, dass die Oberfläche von S sich berechnet durch:

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{f'(z)^2 + 1}dz$$

Aufgabe 33 (2,5+2,5+2*)**.** Sei $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) Sei $F\colon U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$(\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ (welches nach (iii*) dann gleich dem Oberflächeninhalt von ganz $\mathbb{T}^2_{r,R}$ ist.).

(iii*) Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat, d.h. dass $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} 1_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)} \mathrm{dvol} = 0$ für die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)}\colon \mathbb{T}^2_{r,R} \to \mathbb{R}$ ist.

Abgabe bis Mittwoch 17.01.24 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

Übungsblatt 12

Aufgabe 34. Berechnen Sie $\int_S \langle V, N\rangle \mathrm{dvol}$ für $V = (yx^2, xy^2 - 3z^4, x^3 + y^2)$, wobei S ist der Rand von $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \leq 0, y \leq 0\}$ und N der äußere Einheitsnormalenvektor auf S ist – einmal direkt und einmal mittels des Divergenzsatzes.

Aufgabe 35. Sei $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{2}\}$. Sei γ eine einfach geschlossene Kurve, welche $C \cap \{z = \frac{1}{2}\}$ parametrisiert. Berechnen Sie $\int_\gamma F \cdot ds$ für $F = (\sin x - \frac{y^3}{3}, \cos y + \frac{x^3}{3}, xyz)$ einmal direkt und einmal mittels des Rotationssatzes (=Satz von Stokes) unter Verwendung der Fläche C.

Aufgabe 36 (2,5+2,5)**.**

(i) Zeigen Sie explizit mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit, dass $f_1(z) = z^2$ komplex differenzierbar ist, $f_2(z) = \bar{z}$ jedoch nicht.

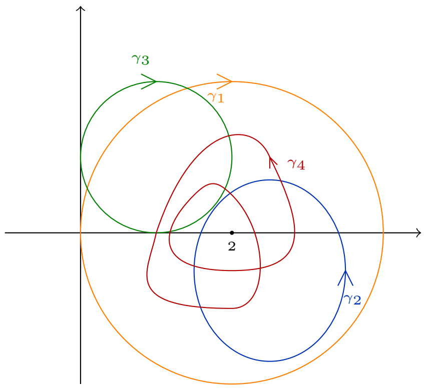
(ii) Sei $f_1(z) = \sin z$ und $f_2 = \cos z$. Es ist $\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x$ und $\cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$ für $x \in \mathbb{R}$. Nun folgt mit $\sin z := \sin(x + \mathrm{i}y)$ und Additionstheorem für den Sinus, dass $\sin z = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sin y$. Analog ist $\cos z := \cos(x + \mathrm{i}y)$.

Rechnen Sie explizit nach, dass $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt und damit holomorph ist. Was ist $f_1'(z)$ und $f_2'(z)$?

Abgabe bis Mittwoch 24.01.24 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

Übungsblatt 13

Aufgabe 37. Sei $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-2}$. Seien $\gamma_i \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, 4$, stetig differenzierbar, so dass diese die Kurven im Bild einmal in angezeigter Durchlaufrichtung parametrisieren (Bei der roten Kurven wird im Schnittpunkt 'in Laufrichtung weiter gelaufen – also nicht abbiegen').



Bestimmen Sie $\int_{\gamma_i} f dz$ für $i = 1, \dots, 4$ und $\int_{\gamma_2} \frac{e^{3z}}{(z-2)^3} dz$ (jeweils mit Begründung).

Aufgabe 38. Sei $f = (f_1, f_2)^T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar mit $\partial_x f_2 = -\partial_y f_1$ und $\partial_x f_1 = \partial_y f_2$. Parametrisiere $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ eine glatte einfach geschlossene Kurve. Wir fassen f als komplexe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, dass dann das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma f dz = 0$$

ist.

Hinweis: Verwenden Sie zweimal den Divergenzsatz für das von γ eingeschlossene Gebiet, einmal mit dem Vektorfeld $V_1(x, y) = (f_1(x, y), -f_2(x, y))^T$ und einmal mit $V_2(x, y) = (f_2(x, y), f_1(x, y))^T$.

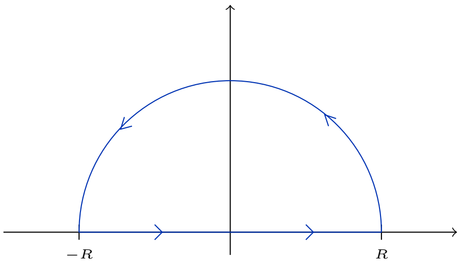


Abbildung 1: Die blaue Kurve (einmal durchlaufen) sei durch γ_R in Durchlaufrichtung der Pfeile parametrisiert. Dabei nennen wir den Anteil der Kurve, die den Halbkreis parametrisiert α_R.

Aufgabe 39. Füllen Sie die Fehlstellen aus und führen Sie die Anweisung vom Rand aus.

Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ mittels komplexer Analysis berechnen. Da $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ist, wissen wir sogar schon was rauskommen muss: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_{-\infty}^{\infty} = \pi$. Aber das folgende Vorgehen ermöglicht auch einige andere reelle Integrale auszurechnen, wo wir oft keine Stammfunktion angeben können.

Es ist $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\underline{\qquad\qquad}\}$. Von den Stellen, in denen f nicht holomorph ist, liegt nur $z_0 = \underline{\ \ }$ in der oberen Halbebene. Sei $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(z_0)$ vollständig in der oberen Halbebene liegt.

$B_\epsilon(z_0)$ ins Bild einzeichnen.

Es ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\underline{\ \ }}^{\underline{\ \ }} \frac{1}{1+x^2} dx$. Um das rechte Integral zu berechnen, betrachten wir die Kurve γ_R wie in der Abbildung. Für R groß genug, liegt $B_\epsilon(z_0)$ vollständig im Inneren der von γ_R begrenzten Menge U. Sei D offen mit $\bar{U} \subset D$, so dass f auf $D \setminus B_\epsilon(z_0)$ $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ist. Dann ist nach Folgerung 2.2.3

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz$$

Um die rechte Seite zu berechnen, zerlegen wir [1]

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{\underline{\quad}} \left(\frac{\underline{\ \ }}{z - z_0} + \frac{\underline{\ \ }}{z + \underline{\ \ }} \right).$$

Damit ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{1}{\underline{\quad}} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \left(\frac{\underline{\ \ }}{z - \underline{\ \ }} + \frac{\underline{\ \ }}{z + \underline{\ \ }} \right) = \frac{1}{\underline{\quad}} \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\underline{\ \ }}{z - \underline{\ \ }} dz}_{=\underline{\qquad}\text{ Beispiel }\underline{\qquad}} + \frac{1}{\underline{\quad}} \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\underline{\ \ }}{z + \underline{\ \ }} dz}_{=\underline{\quad}\text{ nach Satz}\underline{\quad}}$$

$$= \underline{\qquad}.$$

Andererseits ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{\alpha_R} f(z)dz.$$

Das heißt, wir brauchen noch $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(z)dz$. Dazu wollen wir dieses Integral abschätzen:

$$\left| \int_{\alpha_R} f(z)dz \right| \leq \underline{\qquad\quad} L(\alpha_R) = \underline{\qquad\quad} \to \underline{\quad\ } \qquad \text{für } R \to \infty.$$

Zusammen ergibt sich somit $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{\alpha_R} f(z)dz \right) = \pi$.

Abgabe bis Mittwoch 31.01.24 bis 10:30 Uhr in den Briefkasten der Vorlesung (im UG)

[1] Das ist eine Partialbruchzerlegung, vgl. [Analysis 1, Kap. 4.5.3].

Erweiterung der Analysis Marius Amann, Nadine Große
WS 23/24

Übungsblatt 14– ohne Abgabe

Aufgabe 40. Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ noch einmal berechnen und dabei fast genau wie in Aufgabe 39 vorgehen – nur die Partialbruchzerlegung werden wir durch eine Verwendung des Cauchy-Integralsatzes ersetzen:

Wir beginnen genau wie in Aufgabe 39 bis wir die Formel

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz$$

haben. Um nun die rechte Seite zu berechnen, setzen wir $g(z) = \frac{1}{z+\underline{\quad}}$. Dann ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$. Die Funktion $g(z)$ ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene ____________________. Damit folgt mit dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = \underline{\qquad\quad}$$

Der Rest geht jetzt genau wie in Aufgabe 39 weiter.

Verwenden Sie diese Abwandlung des Vorgehens in Aufg. 39, um so auch $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4x^2)^2} dx$ zu berechnen.

Aufgabe 41. Sei $p \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $\epsilon > 0$ und $f\colon B_{R+\epsilon}(p) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \partial B_R(p)} |f(z)|.$$