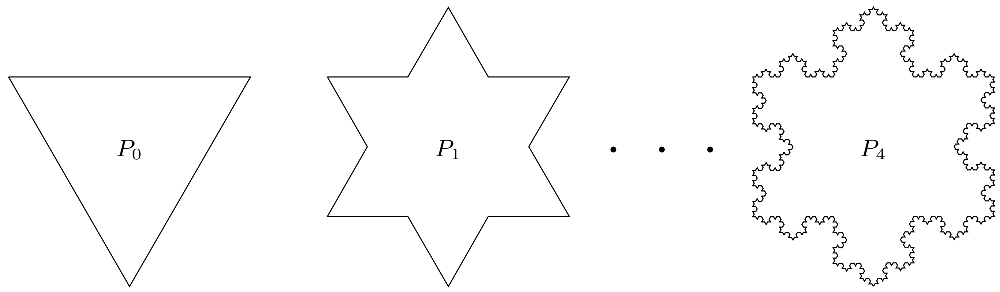
Erweiterung der Analysis Nadine Große, Jonah Reuß

WS 24/25

Übungsblatt 1

Abgabe online in Ilias bis Mi 23.10. 12 Uhr.

Aufgabe 1 (2.5+2.5)**.** Sei P_0 das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n, indem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mitteleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Sei ℓ_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n.

(a) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \ell_n = \infty$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $A_n - A_{n-1}$. Zeigen Sie, dass A_n für $n \to \infty$ konvergiert.

Aufgabe 2 (1+2.5+1.5)**.** Sei $\gamma\colon t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos^2(t), 3\sin^2(t))^T$.

(i) Skizzieren Sie γ.

(ii) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, das ist die Länge der Kurve γ auf dem Intervall $[0, t]$ (Also $s(0) = 0$ und $s(\frac{\pi}{2}) = L(\gamma)$.).

(iii) Die Funktion der Bogenlänge $s\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, L(\gamma)]$ ist ein Homöomorphismus. Warum? Ist es auch ein C^1-Diffeomorphismus Begründen Sie?

Aufgabe 3 (2.5+2.5)**.** Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Variation $V(f)$ von f ist definiert als

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b)$ des Intervalls $[a, b]$ geht.

(i) Beweisen Sie: Sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve; $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))^T$ für $\gamma_i\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist γ genau dann rektifizierbar, falls alle γ_i beschränkte Variation haben, d.h. falls $V(\gamma_i) < \infty$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkte Variation hat.

Nach (i) ist dann somit die Kurve $\gamma(t) = (t, f(t))^T$ mit f aus (ii) und $t \in [0, 1]$ nicht rektifizierbar.

Was bedeutet das für die Lange der Kurve γ?