# Übungsblatt 2

**Abgabe online in Ilias bis Mi 30.10. 12 Uhr**.

**Aufgabe 4** (1+1,5+1,5+1)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_\gamma f ds$ für $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1+9x^4}}$ für $\gamma\colon t \in [-1,2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = (-xy, x^2)^T$, wobei $\gamma$ den Kreis um den Ursprung vom Radius $R$ im mathematisch positiven Drehsinne (= entgegen den Uhrzeigersinn) durchläuft.

(iii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y,z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve $\gamma$, die geradlinig von $(4,-1,2)^T$ nach $(1,7,-1)^T$ verläuft.

(iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

**Aufgabe 5.** Sei $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine parametrisierte Kurve. Wir können $g$ als Vektorfeld

$$V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (\operatorname{Re} g(x+\mathrm{i}y), \operatorname{Im} g(x+\mathrm{i}y))^T$$

auffassen. Vergleichen Sie das Kurvenintegral zweiter Art $\int_\gamma V \cdot ds$ mit dem komplexen Kurvenintegral $\int_\gamma g\, dz$. Im Spezialfall, dass $g$ nur reelle Werte annimmt, vergleichen Sie diese Integrale zusätzlich mit dem Kurvenintegral $\int_\gamma g\, ds$ erster Art.

**Aufgabe 6.** Sei $f\colon \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $\gamma_R\colon \theta \in [0,\pi] \mapsto Re^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$ für $R > 0$. Sei $a > 0$, $g(z) = e^{\mathrm{i}az} f(z)$ und $M_R := \max_{z \in \mathrm{Bild}(\gamma_R)} |f(z)|$. Zeigen Sie: Aus $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$ folgt $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z) dz = 0$.

Hinweis: Schätzen Sie das Integral zunächst für ein festes $R$ ab. Benutzen Sie dazu die Eulersche Formel und $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ für $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (Warum gilt die letzte Ungleichung?) und eine Symmetrie von sin.