Erweiterung der Analysis Nadine Große, Jonah Reuß
WS 24/25

Übungsblatt 3

Abgabe online in Ilias bis Mi 06.11. 12 Uhr.

Aufgabe 7 (3+2)**.**

(i) (Länge in Polarkoordinaten) Sei $\gamma\colon I=[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Diese sei in Polarkoordinaten durch die Radiusfunktion $r(t)$ und die Winkelfunktion $\phi(t)$ gegeben, d.h. $\gamma(t)=(r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t))^T$. Rechnen Sie nach, dass die Länge von γ durch

$$L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{r'(t)^2+r(t)^2\phi'(t)^2}dt$$

gegeben ist.

Berechnen Sie damit die Länge der Kurve, die durch die implizite Vorschrift $r(\phi)=2+2\cos\phi$, $\phi\in[0,2\pi]$, (in Polarkoordinaten) gegeben ist, und skizzieren Sie die Kurve.

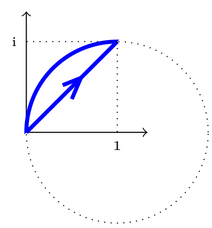
(ii) (Länge in Kugelkoordinaten) Sei $\gamma\colon I=[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Kurve. Berechnen Sie in Analogie zu (i) die Länge von γ in Kugelkoordinaten

$$\gamma(t)=(r(t)\cos\phi(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\phi(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))^T.$$

Aufgabe 8 (2,5+2,5)**.**

(i)

Berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z}dz$, wobei γ die blaue Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



(ii) Sei $\gamma(t\in[0,1])=r(t)e^{\mathrm{i}\phi(t)}$ eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve (in Polardarstellung) Rechnen Sie nach[1] $\int_\gamma \frac{1}{z}dz=\mathrm{i}(\phi(1)-\phi(0))$. Welche Werte kann $\phi(1)-\phi(0)$ annehmen? Zeichnen Sie jeweils ein Beispiel einer solchen Kurve.

Aufgabe 9 (2,5+2,5)**.**

(i) Sei $\phi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $V(x):=\operatorname{grad}\phi(x):=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x)\right)^T$. Für $x\in\mathbb{R}^n$ sei $\gamma_x(t\in[0,1])=tx$. Rechnen Sie nach, dass $\int_{\gamma_x}V\cdot ds=\phi(x)-\phi(0)$ gilt.

(Hinweis: Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\phi\circ\gamma)$.)

Gilt das auch, wenn γ_x eine beliebige stetige differenzierbare Kurve von 0 nach x ist?

(ii) Sei nun $V\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so dass für alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven γ_x von 0 nach x der Wert von $\int_{\gamma_x}V\cdot ds$ nicht von der Wahl von γ_x abhängt (von x wird es i.A. natürlich schon abhängen). Zeigen Sie, dass es dann ein $\phi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $V=\operatorname{grad}\phi$ gibt.

(Hinweis: Verwenden Sie dann (i) um einen Kandidaten für ϕ hinzuschreiben, benutzen Sie die Definition der partiellen Ableitung über den Differenzenquotient zum Berechnen des Gradienten und nutzen Sie die Wegunabhängigkeit des Integrals um den Integralsweg dann zu vereinfachen.)

[1] Dabei keine Sätze zu Kurvenintegralen verwenden, die wir noch nicht hatten.