Übungsblatt 5

Abgabe online in Ilias bis Mi 20.11. 12 Uhr.

Aufgabe 13. Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es ist $\operatorname{rot} V(x,y) := \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_x}{\partial y}(x,y)\right)$ für $V = (V_x, V_y)$. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ, die den Rand entgegen den Uhrzeigersinn durchläuft, und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \mathrm{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds$$

gilt.

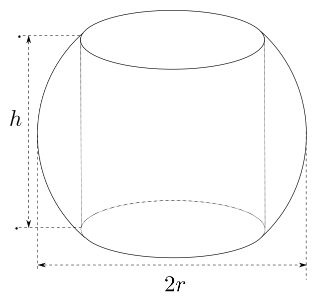
Hinweis: Eine 'einfache Wahl' von γ verringert den Rechenaufwand. Dazu hilft es vielleicht erst einmal die linke Seite teilweise auszurechnen.

Aufgabe 14 (2,5+2,5)**.** (Prinzip des Cavalieri)

(i) Seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, beschränkt und so dass $1_{\Omega_i}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Für $h \in \mathbb{R}$ fassen wir $\Omega_{i,h} := \Omega_i \cap \{x_n = h\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n = h\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$. Sei nun für alle $h \in \mathbb{R}$ die Funktion $1_{\Omega_{i,h}}\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $\operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{i,h} := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\Omega_{i,h}} \mathrm{dvol}$ (vgl. Bemerkung 1.2.4). Sei $\operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{1,h} = \operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{2,h}$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{vol}\Omega_1 = \operatorname{vol}\Omega_2$ gilt.

(ii) (Serviettenring-Problem)

Sie haben eine Kugel von Radius r und stechen mittels eines Zylinders, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Teil der Kugel aus. Dann bleibt (wenn der Radius des Zylinders kleiner r war) ein Rest übrig. Dieser Rest habe Höhe h. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Restes nicht vom Radius der ursprüngliches Kugel abhängt.



Aufgabe 15. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ so ab, dass Sie dies auf Ausdrücke in $S^k(f) - S_k(f)$ und $S^k(g) - S_k(g)$ zurückführen können.