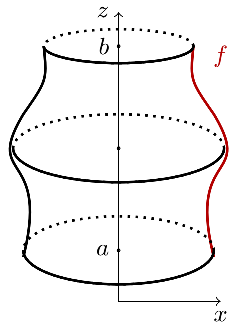
Übungsblatt 6

Abgabe online in Ilias bis Mi 27.11. 12 Uhr.

Aufgabe 16 (2,5+2,5)**.** (Volumen von Rotationskörpern)



(i) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion. Betrachten wir im $\mathbb{R}^3$ in der (x,z)-Ebene den Funktionsgraphen von $x = f(z)$ und drehen diesen um die z-Achse. Dabei entsteht eine Rotationsfläche, vgl. Abb. Zwischen den Ebenen $z = a$ und $z = b$ schließt diese eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein. Geben Sie Ω in der Form $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dots\}$ an und zeigen Sie:

$$\operatorname{vol}\Omega = \int_a^b \pi f(z)^2 dz.$$

(ii) Berechnen Sie mittels (i) das Volumen einer Kugel mit Radius r.

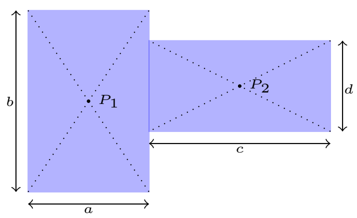
Aufgabe 17 (2,5+2,5)**.**

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist das Innere, was durch die Menge $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ beschränkt wird. Skizzieren Sie Ω und berechnen Sie das Volumen von Ω.

(ii) Berechnen Sie $\int_\Omega z \operatorname{dvol}$ für $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Aufgabe 18 (1,5+1,5+2)**.**

(i) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt der blauen Fläche im Bild gleich dem Punkt $\frac{abP_1 + cdP_2}{ab+cd}$ ist.



(ii) Wir betrachten eine Luftsäule mit rechteckiger Grundfläche Q (Seitenlängen seien a und b) und der Höhe h. Die Dichte der Luft sei $\rho(x,y,z) = \rho_0 e^{-\alpha z}$. Berechnen Sie die Masse der Luftsäule.

(iii) Zwei Zahlen werden zufällig aus dem Intervall $[0,1]$ ausgewählt (uniform gleichverteilt). Das Maximum der beiden Zahlen nennen wir X, das Minimum Y. Ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte[1] ist dann

$$\rho_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{falls } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Was ist der Erwartungswert von X und was ist der Erwartungswert von $X \cdot Y$?

[1] Zur Info: $\rho_{X,Y}$ kann man sich wie folgt herleiten: Seien a, b die beiden gezogenen Zahlen. Dann berechnen sich X, Y aus a, b mittels $f\colon (a,b) \in [0,1]^2 \to (X = \max\{a,b\}, Y = \min\{a,b\}) \in [0,1]^2$. Da a, b unanhängig voneinander sind und gleichverteilt aus $[0,1]$ gezogen werden, ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von a, b gleich $\rho_{a,b} = 1_{[0,1]^2}$. Wir wollen die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$ bestimmen und damit dann die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte mittels $\rho(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$: Es ist
$$F_{X,Y}(c,d) = P(X \leq c, Y \leq d) = \begin{cases} P(a \leq d, b \leq d) + P(a \in [c,d), b \leq d) + P(b \in [c,d), a \leq b) = 2cd - d^2 & 0 \leq d \leq c \leq 1 \\ P(a \leq c, b \leq c) = c^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$