**Erweiterung der Analysis**

Nadine Große, Jonah Reuß
WS 24/25

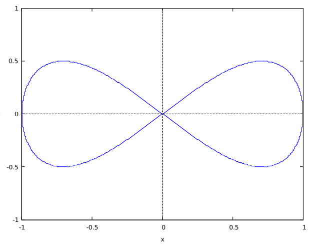
# Übungsblatt 7

**Abgabe online in Ilias bis Mi 4.12. 12 Uhr**.

**Aufgabe 19.** Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten $\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in Q\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{vol}_{n+1} \operatorname{graph}(f) = 0$ ist.

**Aufgabe 20** (1,5+2+1,5)**.**

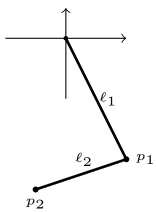
(i) Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$. Die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ ist eine *Lemniskate/ figure-eight Kurve.*



Ist die Lemniskate eine Untermannigfaltigkeit? Wenn nicht, was ist die maximale Teilmenge, die eine Untermannigfaltigkeit ist. Begründen Sie.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte $b$, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte $a$ und $b$, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

(iii)




Sei ein Doppelpendel wie im Bild gegeben (d.h. der Aufhängepunkt im Ursprung ist fest, die Längen $\ell_1$ und $\ell_2$ der Stäbe ist fest, sonst ist alles frei beweglich). Sei $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ die Menge aller $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4$, die durch diese Konstruktion erreichbar sind. Bestimmen Sie $M$ und zeigen Sie, dass $M$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist. Was ist die Dimension?

**Aufgabe 21** (1,5+1,5+2)**.** Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y)^T \mapsto (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)^T,$$

(i) Zeigen Sie, dass $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Ellipse ist (s. nächste Seite für einen Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln). Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche $x$ stimmt das nicht und was ist dann das Bild?

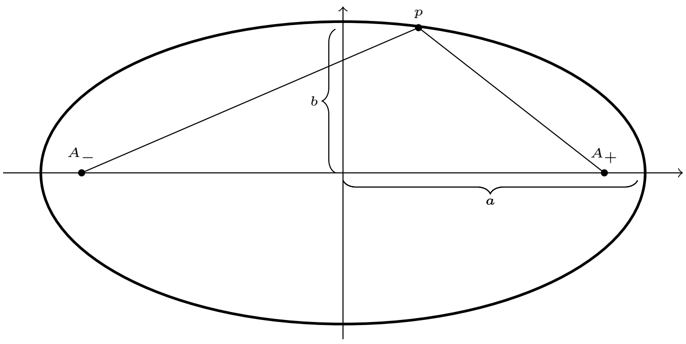
(ii) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y)$ für fast jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Hyperbel ist. Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche $y$ stimmt das nicht und was ist dann das Bild?

(iii) Finden Sie eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ (möglichst zusammenhängend), so dass $f|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$ bijektiv ist. Ist $f|_V$ dann ein Homöomorphismus? Finden Sie ein $U \subset V$ offen derart, dass $f|_U\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist und $U \subset V$ maximal mit dieser Eigenschaft ist.

## Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln

**Ellipsengleichung** in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



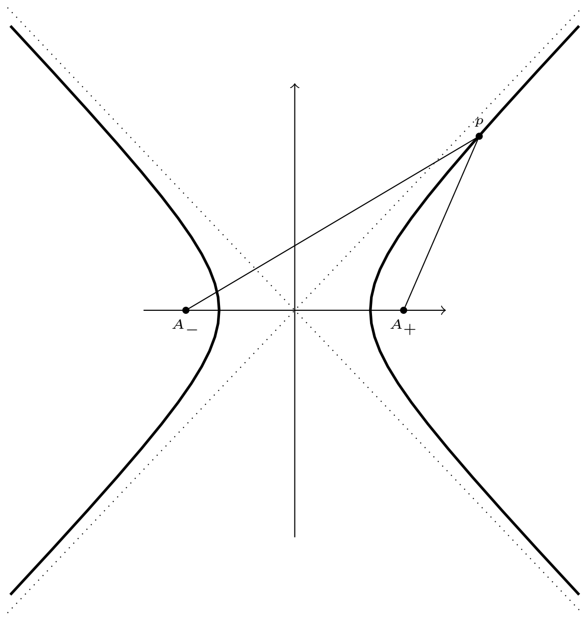

Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Ellipse.
Die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist auch gleich

$$\{\text{alle Punkte } p, \text{ deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten } A_\pm, \text{ gleich } 2a \text{ ist}\}.$$

Das ist die sogenannte *Gärtnerkonstruktion* der Ellipse, https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#G%C3%A4rtnerkonstruktion.

**Hyperbelgleichung** in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$




Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Hyperbel.

Die Asymptoten der Hyperbel (gepunktete Geraden im Bild) sind $x \mapsto \pm\frac{b}{a}x$.
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\Big\{\text{alle Punkte } p, \text{ mit } \Big||pA_+| - |pA_-|\Big| = 2a\Big\}.$$