Erweiterung der Analysis

Nadine Große, Jonah Reuß
WS 24/25

Übungsblatt 8

Abgabe online in Ilias bis Mi 11.12. 12 Uhr.

Aufgabe 22 (2.5+2.5)**.** Geben Sie genügend lokale Parametrisierungen an, um zu sehen, dass folgende Mengen nach Satz 1.3.4 Untermannigfaltigkeiten sind. Skizzieren Sie die Mengen für $m = 2$, $k = 1$. Was ist jeweils die Dimension?

(i) $S^m = \{x = (x_1, \ldots, x_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\}$

(ii) $G = \{x = (x_1, ..., x_{m+1}, ..., x_{m+k})^T \in \mathbb{R}^{m+k=n} \mid x_{m+i} = f_i(x_1, ..., x_m)\}$ für eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Aufgabe 23 (2+1.5+1.5+2*)**.**

(i) Sei $f(x, y) = (ax, by)$ für $a, b > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Zeigen Sie (ohne Verwendung der Transformationsformel/ einer Koordinatentransformation in $\mathbb{R}^2$), dass $f(\Omega) := \{f(z) \mid z \in \Omega\}$ Jordan-messbar mit $\operatorname{vol} f(\Omega) = ab \operatorname{vol} \Omega$ ist.

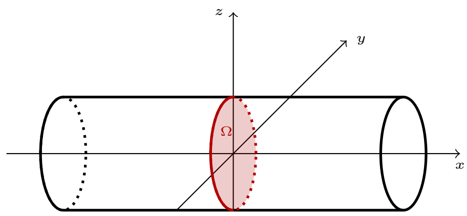
(ii) Benutzen Sie (i) um den Flächeninhalt des Inneren einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus dem Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen.

(iii) Berechnen Sie alternativ den Flächeninhalt aus (ii), in dem Sie den Flächeninhalt im ersten Quadranten unter der Ellipse direkt berechnen.

(iv*) Die gleiche Methode hilft leider nicht den Umfang der Ellipse einfach zu berechnen. Rechnen Sie nach, dass $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt$ der Umfang der Ellipse ist. Dies ist ein elliptisches Integral. Schreiben Sie L als ein Vielfaches eines vollständigen elliptisches Integral zweiter Art[1], d.h. der Form $c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}\, dt$, und lesen Sie mittels Abbildung 17.2 der Fußnote[2] ab, was die Länge einer Ellipse mit $a = 2$ und $b = 1$ ist (dazu muss natürlich erst das zugehörige α dort bestimmt werden).

Aufgabe 24.
Sei $\Omega \subset B_d(0) \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right], (y, z) \in \Omega \right\}$$



(d.h. S ist ein Stab der Länge ℓ und konstantem Querschnitt Ω). Sei die Dichte des Stabes konstant und m seine Masse. Sei J das Trägheitsmoment von S bei Drehung um die z-Achse.

Zeigen Sie, dass dann

$$J = m\left(\frac{\ell^2}{12} + O(d^2)\right)$$

gilt.[3]

[1] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_590.htm – 17.3.3
[2] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_592.htm
[3] Ist d sehr klein, verglichen zu ℓ, nennt man S einen dünnen Stab und rechnet direkt mit $J = \frac{m\ell^2}{12}$.