Nadine Große, Jonah Reuß

Übungsblatt 9

Abgabe online in Ilias bis Mi 08.01. 12 Uhr.

Aufgabe 25 (1,5+1,5+2)**.** Sei

$$\phi_1 \colon (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (s, ts) \in \mathbb{R}^2$$

und

$$\phi_2 \colon (r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben.

(i) Geben Sie für $i \in \{1,2\}$ jeweils eine maximale offene Teilmenge $U_i \subset \mathbb{R}^2$ an, so dass $\psi_i := \phi_i|_{U_i}$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.

(ii) Sei das Dreieck $\Delta = \{(x,y) \mid x \in [0,a], 0 \leq y \leq bx\}$, für $a, b > 0$, gegeben. Skizzieren Sie jeweils $\psi_i^{-1}(\Delta)$.

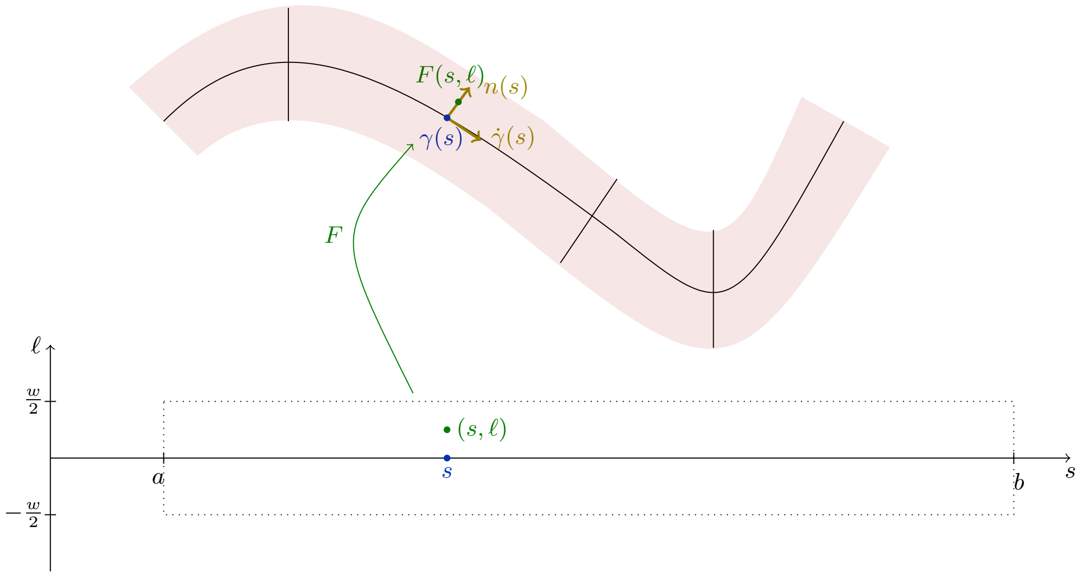
(iii) Benutzen Sie für jedes ψ_i die Transformationsformel um den Flächeninhalt von Δ zu berechnen.

Aufgabe 26 (1,5+2+1,5)**.** Berechnen Sie von folgenden Funktionen jeweils das Integral über $B_R(0) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid |u| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) $f(u) = |u|^2$

(ii) $f(u)$ ist das Quadrat des Abstandes von u zur z-Achse.

(iii) $f(u)$ ist der Abstand von u zur $x - y$-Ebene.



Aufgabe 27 (1+4+2*)**.** Der Schleifensatz (ribbon theorem) besagt:

Schleifensatz. Die Fläche eines gekrümmten Gebietes konstanter Breite ist gleich dieser Breite mal der Länge seiner Mediankurve, das ist die Kurve, die durch die Mittelpunkte der Breiten beschrieben wird, vgl. Abbildung.

Wir wollen diesen Satz mittels der Transformationsformel beweisen. Dazu sei die Mediankurve durch eine glatte Kurve $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$ mit $|\dot\gamma(s)| = 1$ beschrieben und $n(s)$ sei der Einheitsvektor, der durch Drehung von $\dot\gamma(s)$ in mathematisch positiver Drehrichtung entsteht. Sei w die konstante Breite.

Mittels dem Parameter der Kurve und eine Parameter entlang der Breite parametrisieren wir das Gebiet:

$$F\colon \left(-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}\right) \times (a,b) \to \mathbb{R}^2, \quad (\ell, s) \mapsto F(\ell, s).$$

(i) Was ist hier $F(\ell, s)$?

(ii) Benutzen Sie die Transformationsformel, um den Flächeninhalt des gekrümmten Gebietes auszurechnen.

Hinweis:

a) Überlegen Sie sich, dass aus $|n(s)| = 1$ folgt, dass $\langle n(s), \dot n(s)\rangle = 0$ gilt.

b) Es sollte dann $\det D_{(\ell,s)}F = -1 - \ell|\dot n(s)|$ sein. Benutzen Sie (vgl. Zusatzteil), dass $\frac{w}{2}|\dot n(s)| \le 1$ ist.

(iii*) Gilt die Bedingung $\frac{w}{2}|\dot n(s)| \le 1$ nicht, dann kann F nicht injektiv sein. Veranschaulichen Sie sich die Bedeutung, dieser Bedingung für den Fall, dass γ einen Kreis vom Radius R beschreibt.