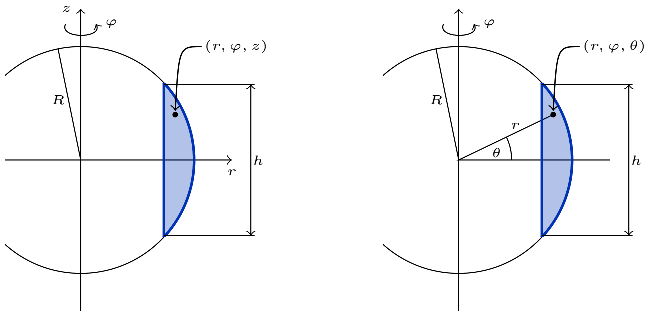
Erweiterung der Analysis

Nadine Große, Jonah Reuß
WS 24/25

Übungsblatt 10

Abgabe online in Ilias bis Mi 15.01. 12 Uhr.

Aufgabe 28. Wir betrachten noch einmal das Serviettenring-Problem aus Aufgabe 14. Dieses Mal wollen wir das Volumen des Serviettenringes anders ausrechnen und zwar mit der Transformationsformel.
Benutzen Sie einmal Zylinderkoordinaten (wie links im Bild) und einmal Kugelkoordinaten (wie rechts im Bild), um jeweils das Volumen des Serviettenrings der Höhe h entstanden aus einer Kugel vom Radius R zu berechnen.



Aufgabe 29. (2,5+2,5)

(i) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Funktion und S die Menge, welche durch Rotation der Kurve $\{(f(z), 0, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b)\}$ um die z-Achse entsteht. Dann ist

$$S = \{(f(z)\cos ?, f(z)?, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b), \phi \in \mathbb{R}\}.$$

Was muss bei den Fragezeichen stehen? Finden Sie geeignete Parametrisierungen, um zu zeigen, dass S eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) (Oberfläche von Rotationskörpern) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}_{>0}$ und S wie in (i). Zeigen Sie, dass die Oberfläche von S sich berechnet durch:

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{f'(z)^2 + 1}dz$$

Aufgabe 30 (2,5+2,5+2*)**.** Sei $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) Sei $F\colon U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$(\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ (welches nach (iii*) dann gleich dem Oberflächeninhalt von ganz $\mathbb{T}^2_{r,R}$ ist.).

(iii*) Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat, d.h. dass $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} 1_{\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)} \mathrm{dvol} = 0$ für die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)} \colon \mathbb{T}^2_{r,R} \to \mathbb{R}$ ist.