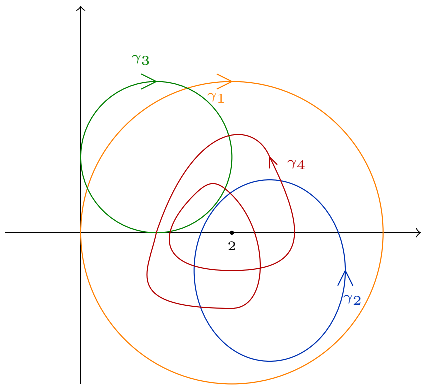
Übungsblatt 12

Abgabe online in Ilias bis Mi 29.01. 12 Uhr.

Aufgabe 34. Sei $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-2}$. Seien $\gamma_i \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, 4$, stetig differenzierbar, so dass diese die Kurven im Bild einmal in angezeigter Durchlaufrichtung parametrisieren (Bei der roten Kurven wird im Schnittpunkt 'in Laufrichtung weiter gelaufen – also nicht abbiegen').



Bestimmen Sie $\int_{\gamma_i} f dz$ für $i = 1, \ldots, 4$ und $\int_{\gamma_2} \frac{e^{3z}}{(z-2)^3} dz$ (jeweils mit Begründung).

Aufgabe 35. Sei $f = (f_1, f_2)^T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\partial_x f_2 = -\partial_y f_1$ und $\partial_x f_1 = \partial_y f_2$. Parametrisiere $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ eine glatte einfach geschlossene Kurve. Wir fassen f als komplexe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, dass dann das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma f dz = 0$$

ist.

Hinweis: Verwenden Sie zweimal den Divergenzsatz für das von γ eingeschlossene Gebiet, einmal mit dem Vektorfeld $V_1(x, y) = (f_1(x, y), -f_2(x, y))^T$ und einmal mit $V_2(x, y) = (f_2(x, y), f_1(x, y))^T$.

Bemerkung: Das Resultat stimmt auch, wenn f nur als total differenzierbar vorausgesetzt wird (=Cauchy Integralsatz). Doch dann ist der Beweis komplizierter, da wir nicht direkt den Divergenzsatz anwenden können.

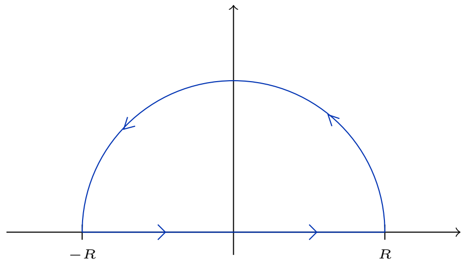


Abbildung 1: Die blaue Kurve (einmal durchlaufen) sei durch γ_R in Durchlaufrichtung der Pfeile parametrisiert. Dabei nennen wir den Anteil der Kurve, die den Halbkreis parametrisiert α_R.

Aufgabe 36. Füllen Sie die Fehlstellen aus und führen Sie die Anweisung vom Rand aus.

Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ mittels komplexer Analysis berechnen. Da $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ist, wissen wir sogar schon was rauskommen muss: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_{-\infty}^{\infty} = \pi$. Aber das folgende Vorgehen ermöglicht auch einige andere reelle Integrale auszurechnen, wo wir oft keine Stammfunktion angeben können.

Es ist $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\underline{\qquad\quad}\}$. Von den Stellen, in denen f nicht holomorph ist, liegt nur $z_0 = \underline{\;\;}$ in der oberen Halbebene. Sei $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(z_0)$ vollständig in der oberen Halbebene liegt.

$B_\epsilon(z_0)$ ins Bild einzeichnen.

Es ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\underline{\;\;}}^{\underline{\;\;}} \frac{1}{1+x^2} dx$. Um das rechte Integral zu berechnen, betrachten wir die Kurve γ_R wie in der Abbildung. Für R groß genug, liegt $B_\epsilon(z_0)$ vollständig im Inneren der von γ_R begrenzten Menge U. Sei D offen mit $\bar{U} \subset D$, so dass f auf $D \setminus B_\epsilon(z_0)$ ____________________ ist. Dann ist nach Folgerung 2.2.3

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz$$

Um nun die rechte Seite zu berechnen, setzen wir $g(z) = \frac{1}{z+\underline{\;\;}}$. Dann ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$. Die Funktion $g(z)$ ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene ____________________. Damit folgt mit dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = \underline{\qquad\quad}$$

Andererseits ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{\alpha_R} f(z)dz.$$

Das heißt, wir brauchen noch $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(z)dz$. Dazu wollen wir dieses Integral abschätzen:

$$\left| \int_{\alpha_R} f(z)dz \right| \leq \underline{\qquad\quad} L(\alpha_R) = \underline{\qquad\quad} \to \underline{\qquad} \qquad \text{für } R \to \infty.$$

Zusammen ergibt sich somit $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{\alpha_R} f(z)dz \right) = \pi$.

Verwenden Sie dieses Vorgehen, um so auch $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4x^2)^2} dx$ zu berechnen.