Klausur Erweiterung der Analysis — WS 22/23

21.02.2023, Bearbeitungszeit: 3h

Aufgabe 1 (5=1.5+2+1.5).

(i) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma\colon t \in [0, 2\pi] \mapsto (3\sin(3t), 3\cos(3t))^T \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x, y) = (-xy, x^2)^T$, wobei γ den Rand von $B_R(0)$ im mathematisch positiven Drehsinne durchläuft.

(iii) Definieren Sie die Divergenz und die Rotation im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (5=2+3). (i) Sei $f\colon Q = [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Definieren Sie die k.te Obersumme $S^k(f)$ von f.

(ii) Sei $\Omega = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\} \subset Q = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Integrals, dass die charakteristische Funktion $1|_\Omega\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Aufgabe 3 (5=1.5+1.5+2). Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \sin y$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Die Verwendung von Fubini ergebe

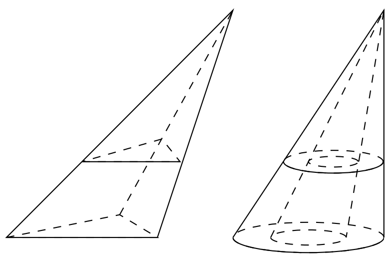
$$\int_\Omega f \mathrm{dvol} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2x}^{\pi} f(x, y)dydx.$$

(i) Berechnen Sie das Integral.

(ii) Skizzieren Sie Ω.

(iii) Verwenden Sie Fubini für $\int_\Omega f \mathrm{dvol}$ aber so, dass ein Integral der Form $\int_?^? \int_?^? f(x, y)dxdy$ entsteht.

Aufgabe 4 (3). Vergleichen Sie die Volumina dieser zwei Körper miteinander. Begründen Sie.



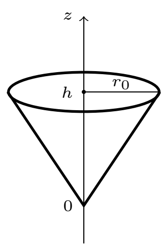
Höhe:	h	h
Grundfläche:	gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Kathete $2a$	Kreisring mit Außenradius a und Innenradius $\frac{a}{2}$

Aufgabe 5 (9=4.5+4.5).

(i)

Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels im Bild bei Rotation um die z-Achse.

Hinweis: Z.B. mit Zylinderkoordinaten.



(ii) Die Funktion $\phi\colon (x,y) \in A := (0,1)^2 \mapsto (x, yx^2) \in \phi(A) \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Diffeomorphismus (muss nicht überprüft werden). Skizzieren Sie $\phi(A)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für ϕ den Flächeninhalt von $\phi(A)$.

Aufgabe 6 (10=1+2+1.5+4.5+1)**.** Sei M die Menge aller Punkte $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2+y^2-z^2=1$. Sei $V(x,y,z)=(x,y,z)^T$. Sei

$$\begin{aligned} K =& \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 \leq 1, z \in [-1,1]\} \\ \Omega =& \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1, z \in (-1,1)\}. \end{aligned}$$

(i) Skizzieren Sie K.

(ii) Berechnen Sie $\int_K \operatorname{div} V \,\mathrm{dvol}$.

(iii) Rechnen Sie mit dem Kriterium vom regulären Wert nach, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist.

(iv) Die Abbildung

$$F\colon U := (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi, v) \mapsto (\cosh v \cos\phi, \cosh v \sin\phi, \sinh v)^T$$

ist ein Diffeomorphismus aufs Bild $F(U) \subset M$ (muss nicht gezeigt werden). Geben Sie $M \setminus F(U)$ an. Zeigen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von M ist. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_\Omega \langle V, N\rangle \mathrm{dvol}$.

(v) Welchem Integral/welchen Integralen (muss nur hingeschrieben und nicht ausgerechnet werden) entspricht nach dem Divergenzsatz der Term $\int_K \operatorname{div} V \,\mathrm{dvol} - \int_\Omega \langle V, N\rangle \mathrm{dvol}$?

Aufgabe 7 (5=2+1+1+1)**.** (i) Definieren Sie 'komplex differenzierbar' und geben Sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an.

(ii) Was ist der Zusammenhang zwischen komplex differenzierbar und den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen?

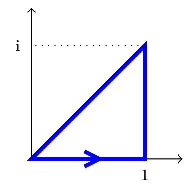
(iii) Rechnen Sie explizit mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit nach, dass $f\colon z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

(iv) Rechnen Sie für die Funktion aus (iii) explizit die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen nach.

Aufgabe 8 (8=3.5+4.5)**.**

(i)

Berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z} dz$, wobei γ die Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



(ii) Bestimmen Sie (mit Begründung) $\int_{\partial B_1(0)} \frac{\sin z}{z-3} dz$ und $\int_{\partial B_2(0)} \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2} dz$ und $\int_{\partial B_3(0)} \frac{\cos z}{z-2} dz$.