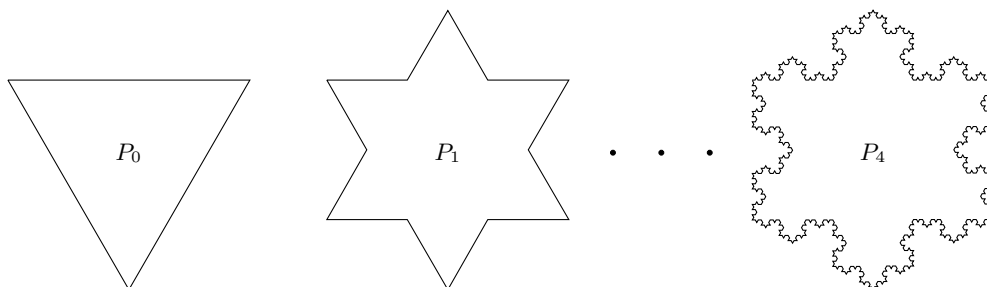


---

## Übungsblatt 1

---

**Aufgabe 1.** Sei  $P_0$  das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone  $P_n$  rekursiv wie folgt:  $P_{n+1}$  entsteht aus  $P_n$ , indem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Sei  $\ell_n$  der Umfang des Polygons  $P_n$  und  $A_n$  der Flächeninhalt des Polygons  $P_n$ .

- Bestimmen Sie  $\ell_n$  und zeigen Sie, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \infty$  gilt.
- Bestimmen Sie  $A_n - A_{n-1}$ . Zeigen Sie, dass  $A_n$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert.

**Aufgabe 2** (1+2.5+1.5). Sei  $\gamma: t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos^2(t), 2 \sin^2(t))^T$ .

- Skizzieren Sie  $\gamma$ .
- Berechnen Sie die Bogenlänge  $s(t)$ , das ist die Länge der Kurve  $\gamma$  auf dem Intervall  $[0, t]$  (Also  $s(0) = 0$  und  $s(\frac{\pi}{2}) = L(\gamma)$ ).
- Die Funktion der Bogenlänge  $s: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, L(\gamma)]$  ist ein Homöomorphismus. Warum? Ist es auch ein  $C^1$ -Diffeomorphismus Begründen Sie?

**Aufgabe 3** (2.5+2.5). Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Variation  $V(f)$  von  $f$  ist definiert als

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen  $\mathcal{Z} = (x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b)$  des Intervalls  $[a, b]$  geht.

- Beweisen Sie: Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte Kurve;  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))^T$  für  $\gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $\gamma$  genau dann rektifizierbar, falls alle  $\gamma_i$  beschränkte Variation haben, d.h. falls  $V(\gamma_i) < \infty$  für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt.
- Zeigen Sie, dass die Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkte Variation hat.

Nach (i) ist dann somit die Kurve  $\gamma(t) = (t, f(t))^T$  mit  $f$  aus (ii) und  $t \in [0, 1]$  nicht rektifizierbar.

---

**Abgabe am Donnerstag 27.10.22 bis 14 Uhr**