
Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (1+1.5+1.5+1). Berechnen Sie

- (i) $\int_{\gamma} f ds$ für $f(x, y) = xy^2$ für eine Kurve γ die einmal den Kreis um den Ursprung vom Radius 2 umrundet.
- (ii) $\int_{\gamma} V \cdot ds$ für $V(x, y) = \begin{pmatrix} 2y \\ 1-x \end{pmatrix}$ entlang $\gamma: t \in [-1, 2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$
- (iii) $\int_{\gamma} V \cdot ds$ für $V(x, y, z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve γ , die geradlinig von $(4, -1, 2)^T$ nach $(1, 7, -1)^T$ verläuft.
- (iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Sei $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine parametrisierte Kurve. Wir können g als Vektorfeld

$$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (\operatorname{Re} g(x + iy), \operatorname{Im} g(x + iy))^T$$

auffassen. Vergleichen Sie das Kurvenintegral zweiter Art $\int_{\gamma} V \cdot ds$ mit dem komplexen Kurvenintegral $\int_{\gamma} g dz$. Im Spezialfall, dass g nur reelle Werte annimmt, vergleichen Sie diese Integrale zusätzlich mit dem Kurvenintegral $\int_{\gamma} g ds$ erster Art.

Aufgabe 6. Sei $f: \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Sei $\gamma_R: \theta \in [0, \pi] \mapsto Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ für $R > 0$. Sei $a > 0$, $g(z) = e^{iaz} f(z)$ und $M_R := \max_{z \in \operatorname{Bild}(\gamma_R)} |f(z)|$. Zeigen Sie: Aus $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ folgt $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g(z) dz = 0$.

Hinweis: Schätzen Sie das Integral zunächst für ein festes R ab. Benutzen Sie dazu die Eulersche Formel und $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ für $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (Warum gilt die letzte Ungleichung?).