Übungsblatt 4

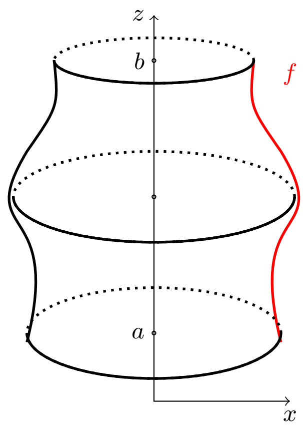
Aufgabe 10 (2.5+2.5)**.** (Volumen von Rotationskörpern)

(i) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion. Betrachten wir im $\mathbb{R}^3$ in der (x,z)-Ebene den Funktionsgraphen von $x = f(z)$ und drehen diesen um die z-Achse. Dabei entsteht eine Rotationsfläche, vgl. Abbildung.

Diese schliesst zwischen den Ebenen $z = a$ und $z = b$ eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein. Geben Sie Ω in der Form $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ldots\}$ an und zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol}\Omega = \int_a^b \pi f(z)^2 dz$$

ist.



(ii) Berechnen Sie mittels (i) das Volumen einer Kugel mit Radius r.

Aufgabe 11. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss, da Q kompakt ist.

Aufgabe 12 (2.5+2.5)**.**

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist das Innere, was durch die Menge $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ beschränkt wird. Skizzieren Sie Ω und berechnen Sie das Volumen von Ω.

(ii) Berechnen Sie $\int_\Omega z \mathrm{dvol}$ für $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Abgabe bis Mittwoch 23.11.22 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss