Erweiterung der Analysis

Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 22/23

Übungsblatt 5

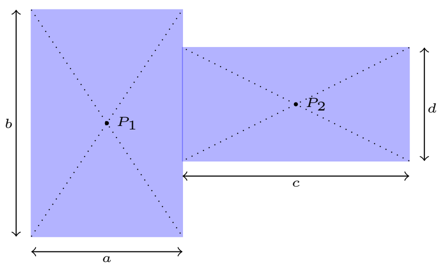
Aufgabe 13. Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ, die den Rand entgegen den Uhrzeigersinn durchläuft, und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \mathrm{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds$$

gilt.

Hinweis: Eine 'einfache Wahl' von γ verringert den Rechenaufwand. Dazu hilft es vielleicht erst einmal die linke Seite teilweise auszurechnen.

Aufgabe 14 (1.5+1.5+2)**.** (i) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt der blauen Fläche im Bild gleich dem Punkt $\frac{abP_1 + cdP_2}{ab+cd}$ ist.



(ii) Wir betrachten eine Luftsäule mit rechteckiger Grundfläche Q (Seitenlängen seien a und b) und der Höhe h. Die Dichte der Luft sei $\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-\alpha z}$. Berechnen Sie die Masse der Luftsäule.

(iii) Zwei Zahlen werden zufällig aus dem Intervall $[0, 1]$ ausgewählt (uniform gleichverteilt). Das Maximum der beiden Zahlen nennen wir X, das Minimum Y. Ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte[1] ist dann

$$\rho_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{falls } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Was ist der Erwartungswert von X und was ist der Erwartungswert von $X \cdot Y$?

[1]Zur Info: $\rho_{X,Y}$ kann man sich wie folgt herleiten: Seien a, b die beiden gezogenen Zahlen. Dann berechnen sich X, Y aus a, b mittels $f\colon (a, b) \in [0, 1]^2 \to (X = \max\{a, b\}, Y = \min\{a, b\}) \in [0, 1]^2$. Da a, b unanhängig voneinander sind auch gleichverteilt aus $[0, 1]$ gezogen werden ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von a, b gleich $\rho_{a,b} = 1_{[0,1]^2}$. Wir wollen die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$ bestimmen und damit dann die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte mittels $\rho(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$: Es ist

$$F_{X,Y}(c, d) = P(X \le c, Y \le d) = \begin{cases} P(a \le d, b \le d) + P(a \in [c, d), b \le d) + P(b \in [c, d), a \le b) = 2cd - d^2 & 0 \le d \le c \le 1 \\ P(a \le c, b \le c) = c^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 15 (3+2+2*)**.** Wir haben einen Stahlträger der Länge L und mit Querschnitt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wie im Bild an den Enden aufgelegt und üben auf diesen in der Mitte eine Kraft F aus. Dabei verbiegt sich der Träger, vgl. Bild, und $w(x)$ sei die Auslenkung des Trägers in Abhängigkeit vom Ort x. Es gilt

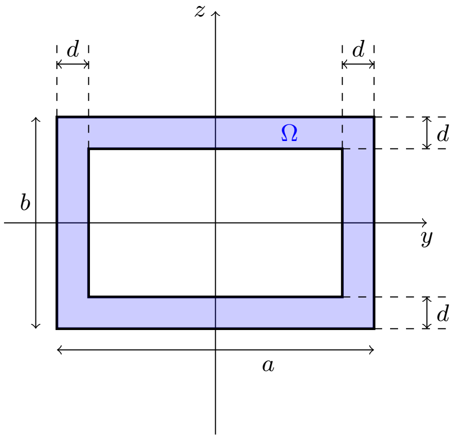
$$w''(x) = \frac{M_y(x)}{EI_y}.$$

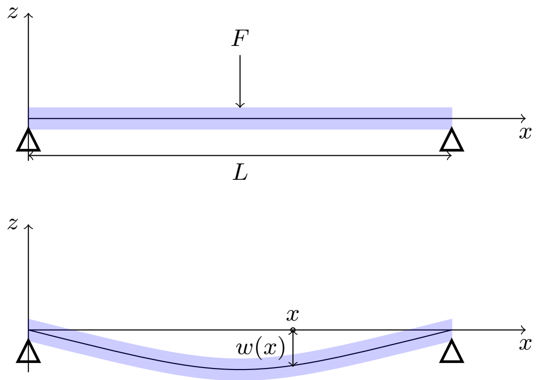
Hierbei ist E die Elastizitätskonstante des Materials des Trägers, also eine Materialkonstante. $M_y(x)$ ist das Biegemoment – für $x \in [0, \frac{L}{2}]$ ist dies gleich $\frac{F}{2}x$ und $I_y = \int_\Omega z^2 \mathrm{dvol}$ ist das Flächenmoment zweiten Grades des Trägers bei Belastung in z-Richtung.[2]

(i) Berechnen Sie I_y.

(ii) Was ist die maximale Auslenkung des Trägers?

(*) Was ist die maximale Auslenkung für $L = 2\,\mathrm{m}$, $E_{\text{Stahl}} = 210\,\mathrm{GPa}$, $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $d = 3\,\mathrm{mm}$ und $F = 1\,\mathrm{kN}$?





Abgabe bis Mittwoch 30.11.22 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss

[2]Der Nullpunkt der z-Koordinaten liegt dabei im Schwerpunkt von Ω – also wie im Bild.